

OLIMPIADAS MATEMÁTICAS 2023

CATEGORIA GRUPAL

Les presentamos el enunciado de un problema relativo a un juego entre dos amigos.

A continuación, encontrarán tres soluciones, con razonamientos diferentes, sin que necesariamente alguna de ellas sea la correcta.

Realicen una lectura detallada de las tres soluciones, y luego les pedimos que:

- Analicen el procedimiento realizado en cada caso
- Evalúen si la respuesta es correcta o no
- Expliquen con sus palabras el razonamiento seguido en la resolución.
- Señalen los errores, en caso que existan, mencionando las propiedades, definiciones o fórmulas mal aplicadas
- Identifiquen la solución correcta, si es que existe. En ese caso fundamenten el procedimiento seguido, las propiedades utilizadas y todo comentario que consideren de interés.
- Si consideran correcto alguno de los procedimientos, deberán completar la solución o la respuesta en caso que corresponda.
- Si consideran todos los resultados incorrectos, deberán resolver íntegramente el problema planteado.

¡Éxitos en la tarea!

Enunciado:

Iván y **José** inventan el siguiente juego y nos proponen un desafío

Se trata de completar 10 casillas con números, según una regla de formación, empezando con un número natural inicial entre **1** y **200** elegido al azar, que se coloca en la primera casilla.

A **Iván** le toca un número " **x** " y para completar la casilla siguiente debe sumar 1 al número de la casilla anterior, y al resultado multiplicarlo por dos.

x									
-----------------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--

A **José** le toca un número " **y** " y para completar cada casilla tiene que multiplicar por tres al número de la casilla anterior y luego restar 1.

y									
-----------------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Se asombran porque al completar la décima casilla ambos obtuvieron el mismo número final; y es por ese motivo que nos desafían a responder las siguientes preguntas:

- ¿Es posible que hayan obtenido el mismo resultado en la décima casilla?
Si no es posible, indiquen claramente la razón.
Si es posible, entonces:
 - ¿Cuál es el número de la última casilla?
 - ¿Cuál es el número " **x** " con el que comenzó Iván?
 - ¿Cuál es el número " **y** " con el que comenzó José?
 - Para las condiciones dadas, los valores de " **x** " e " **y** ", ¿son los únicos posibles?

Solución 1:

Buscamos una fórmula que nos permita expresar la forma en que se van generando los números de cada una de las casillas, y como el número que obtienen Iván y José deben ser iguales, armamos la ecuación

$$(x + 1)2 = 3y - 1$$

$$2x + 2 = 3y - 1$$

$$2x - 3y = -3$$

Se cumple para todos los pares $(x; y)$ de la forma $(3a; 2a + 1)$ con $1 \leq a \leq 66$

Solución 2:

Teniendo en cuenta el enunciado, fuimos sumando 1 y multiplicando por 2 para obtener cada uno de los números de la casilla de Iván.

Hicimos lo mismo para José, pero en este caso fuimos multiplicando por 3 y restando 1 para hallar cada uno de los números de José. Al llegar a la décima casilla nos encontramos que

Para Iván, que empezó con x , nos quedó $1024x + 2040$

Para José, que empezó con y , nos quedó $59049y - 29524$

Pero, como nos dicen que ambos números son iguales

$$1024x + 2040 = 59049y - 29524$$

$$1024x - 59049y = -29524 - 2040$$

$$1024x - 59049y = -31564$$

Una solución es:

$$x = 6197$$

$$y = 108$$

Como x es mayor a 200 no se cumple la condición inicial y no hay solución.

Solución 3

Primero hicimos las cuentas y llamamos x al primer número de Iván (como dice el problema) y para José usamos la letra y

Para completar el segundo casillero, nos dio:

Iván: $2x+2$ José: $3y-1$

Así seguimos casillero a casillero y nos quedó en el décimo

Iván: $512x + 1022$ José: $19683y - 9841$

Sabiendo que los números tenían que ser iguales, planteamos la ecuación

$$512x + 1022 = 19683y - 9841$$

$$512x - 19683y = -9841 - 1022$$

$$512x - 19683y = -10863$$

Resolvimos y llegamos a la conclusión que la ecuación dada en naturales no tiene solución.

Por lo tanto, no es posible que Iván y José hayan obtenido el mismo número