Segundo Nivel – Olimpiadas 13° - 2022 – Segundo contacto

A veces se pierde de vista la relevancia que tiene la resolución de problemas, tanto en la vida cotidiana como en la vida escolar. Cada decisión que debemos adoptar implica revisar críticamente las opciones que tenemos “a la mano” para dar respuesta a aquellas cuestiones que nos causan preocupación. Ese entramado que exige la revisión crítica y la resolución, o por lo menos el acercamiento a la resolución de la situación que nos aqueja se transforma en un nuevo aprendizaje, que seguramente servirá de base para la siguiente construcción de conocimiento.
Seguramente la vida en la escuela no contribuye a esa emancipación de la acción de los estudiantes, ya que al saber se lo presenta como algo acabado y sin posibilidades de revisarlo, olvidando la importancia que tiene, además de la información, el saber hacer. Como asegura Santos Trigo (2008): *“(…) la resolución de problemas es una alternativa en donde una comunidad de aprendizaje busca diferentes formas de resolver una situación problemática y reconocen la relevancia de justificar sus respuestas mediante diferentes tipos de argumentos. La meta no es sólo reportar una respuesta, sino identificar y contrastar diferentes maneras de explorar, representar, resolver el problema y comunicar los resultados.”*
Esos conceptos vertidos por especialistas en la enseñanza de la Matemática nos deberían hacer ver la importancia que tiene la resolución de problemas en la clase de Matemática ya que contribuirá, además de construir nuevos conocimientos, en explorar otras formas de encarar la vida misma.

Y ahora, manos a la obra y a resolver problemas.

1) Siendo la suma de tres números igual a cero y el producto de los mismos igual a uno, $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x.y.z.=1 \end{cases}$, hallar el valor de la suma de los cubos de dichos números : $x^3+y^3+z^3$

Nota:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

(Tomado en la Olimpíada 2019)

2) ¿Será verdad que las siguientes ecuaciones tienen el mismo conjunto solución?

$$a)\ \log\ (x+8) - 2\log(x-1) = 1$$

$$b)\ 2^{10x^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{-21x}$$

3) Hallar el valor de $k$ , sabiendo que $f(x) = 2\,(x+3)(x-k)$ y la parábola que la representa tiene como vértice el punto (2; $f(2)$).

4) Dos números reales y positivos, a y b , cumplen las siguientes dos condiciones:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = a\,.\,b \quad y\ \ a = \frac{2}{b}$$

¿Cuáles son esos números?

5) Determinar un polinomio A, de modo tal que en la función $g(x) = \frac{A}{x-1}$ se verifique:

a) el grado de A sea 3

b) 1 sea raíz doble de A

c) la gráfica de $g(x)$ pase por (0;-4) , (-2;0) y (2;8)

6) Dada la función $h(x) = \begin{cases} \frac{28}{k\,x+1} & si\ x \leq -1 \\ 2m + kx^2 - 20 & si\ \ x > -1 \end{cases}$

a) Hallar los valor de k y m, sabiendo que $h(-3) = 4 \quad y \quad h(0) = 2$
b) Con los valores hallados, calcular las raíces de la función

7) La gráfica de la función $r(x) = 6x^2 - 2tx - 2$ puede cortar o no a la gráfica de la función $s(t) = 2tx - 4$ . Determinar el valor deberá tomar $t$ para que:

a) la parábola y la recta se corten en un solo punto

b) que la parábola y la recta no se corten

8) La profe de Matemática está trabajando junto con sus estudiantes de 6A para las Olimpíadas de Matemática de Ciencias Económicas. Después de hacer muchas y muchas cuentas encontró 300 maneras diferentes de seleccionar dos estudiantes del curso. ¿Se podrá determinar la cantidad de estudiantes que cursan en 6A?

9) Pablo tiene una empresa que fabrica y distribuye polenta instantánea donde sus ganancias están dadas por la función $G(x) = -x^2 + 9x - 8$ , donde $x$ representa los cientos de kilogramos fabricados y distribuidos y $G(x)$ las ganancias obtenidas en miles de dólares.

Rubén produce la misma polenta, pero el comportamiento de sus ganancias responde a un modelo lineal. La gráfica de la función que la representa pasa por los puntos (2;6) y (4;10) siendo la capacidad máxima de producción 1000 kg de polenta (las variables se expresan en las mimas unidades de la función $G(x)$)

a) ¿Qué capacidad máxima de producción tiene Pablo?
b) ¿Cuántos kilogramos debería fabricar y vender Pablo para obtener la máxima ganancia?
c) ¿Cuál sería la ganancia máxima de Rubén?
d) ¿Cuántos kilogramos deberán fabricar y vender ambas empresas para que las ganancias sean las mismas?

10) Con el objetivo de comprar una maquinaria para su fábrica, un comerciante solicita un préstamo de $300.000 a una entidad financiera. Se compromete devolverlo en 18 cuotas mensuales y acuerda el valor de la primer cuota en $20.000, en $22.000 la segunda, la tercera de $24.000 y así sucesivamente hasta cumplir con el tiempo pactado.

a) ¿Cuánto dinero deberá abonar en la cuota número 18?
b) ¿Cuál será el total pagado al finalizar el tiempo pactado?
c) ¿A cuánto ascienden los intereses que deberá abonar? ¿Qué porcentaje representa?

Respuestas:

1) 3

2) Verdadero S = $\left\{2, \frac{1}{10}\right\}$.

3) k = 7

4) $a = \sqrt{2}$ y $b = \sqrt{2}$

5) $A = 2\,(x-1)^2(x+2)$

6) a) k = -2 y m = 11 b) $S = \{1\}$

7) $a)\ t=\sqrt{3}$ y : $t=-\sqrt{3}$ b) $t \in \left(-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right)$

8) 25 estudiantes

9) a) 800 kilogramos b) 450 kilogramos c) 22000 dólares d) 200 kg o 500 kg

10) a) $54.000 b) $666.000 c) $366.000, 122%