

OLIMPIADAS MATEMATICAS 2018

PROBLEMA GRUPAL

Les presentamos un problema resuelto por tres alumnos distintos, con tres soluciones posibles.

Realicen una lectura de las tres soluciones, y luego les pedimos que:

- *Analicen el procedimiento realizado en cada caso.*
- *Evalúen si la respuesta es correcta o no.*
- *Expliquen con sus palabras el razonamiento seguido por cada alumno en la resolución.*
- *Señalen los errores, en caso que existan, mencionando las propiedades, definiciones o fórmulas mal aplicadas*
- *Identifiquen la solución correcta, si es que existe. En ese caso fundamenten el procedimiento seguido, las propiedades utilizadas y todo comentario que consideren de interés.*

Suerte en la tarea!!

PROBLEMA:

Los Bancos están obligados por ley a mantener un porcentaje de los depósitos en las reservas líquidas del banco, el resto del dinero lo pueden prestar con fines comerciales, por ejemplo para otorgar préstamos.

Supongamos que deben mantener por ley un 10% de los depósitos. Una persona en un primer período deposita \$1000, el banco presta \$900 reteniendo \$100, en un segundo período ingresan esos \$900 el banco presta \$810 y retiene \$90, en un tercer período ingresan esos \$810 y el banco presta \$729 y retiene \$81 y así sucesivamente.

¿A partir de que período el total de lo prestado por el banco supera los \$7500 y a cuanto asciende lo retenido por el banco en dicho período?

SOLUCION 1

El total prestado hasta el período "n" se obtiene mediante:

$$7500 = 1000.0,9^1 + 1000.0,9^2 + 1000.0,9^3 + \dots + 1000.0,9^n$$

$$7500 = 1000.(0,9^1 + 0,9^2 + 0,9^3 + \dots + 0,9^n)$$

$$7,5 = 0,9^1 + 0,9^2 + 0,9^3 + \dots + 0,9^n \quad \text{Expresión (a)}$$

Esto último lo multiplicamos por 0,9:

$$7,5 \cdot 0,9 = (0,9^1 + 0,9^2 + 0,9^3 + \dots + 0,9^n) \cdot 0,9$$

$$6,75 = 0,9^2 + 0,9^3 + 0,9^4 + \dots + 0,9^{n+1} \quad \text{Expresión (b)}$$

Restando a la expresión (a) la expresión (b)

$$7,5 = 0,9 + 0,9^2 + 0,9^3 + \dots + 0,9^n \quad \text{Expresión (a)}$$

$$6,75 = 0,9^2 + 0,9^3 + 0,9^4 + \dots + 0,9^{n+1} \quad \text{Expresión (b)}$$

$$7,5 - 6,75 = 0,9 - 0,9^{n+1}$$

Resulta

$$0,9^{n+1} = 0,9 - 0,75$$

$$0,9^{n+1} = 0,15$$

$$(n + 1) \cdot \ln 0,9 = \ln 0,15$$

Aplicando logaritmos:

$$n + 1 = \frac{\ln 0,15}{\ln 0,9}$$

$$n = 18,005986 - 1$$

$$n = 17,005986$$

Después del período 17 lo prestado por el banco supera los \$7500.

Lo retenido por el banco en el período 18 es:

$$\text{Retenido} = 1000.0,1 + 1000.0,1.0,9^1 + 1000.0,1.0,9^2 + \dots + 1000.0,1.0,9^{17}$$

$$\text{Retenido} = 100 (1 + 0,9^1 + 0,9^2 + \dots + 0,9^{17})$$

Operando se obtiene:

$$\text{Retenido} = 100 \frac{1 - 0,9^{18}}{1 - 0,9} = 849,9053$$

Lo retenido por el banco en el período 18 es de aproximadamente \$850 mientras que la suma prestada supera los \$7500.

SOLUCION 2

Como de \$1000 el 90% es lo que presta se obtiene \$900

Para llegar a \$7500 se necesitan:

$$\begin{array}{r} 900 \text{ ————— } 1 \\ 7500 \text{ ————— } n \end{array}$$

$$\text{Períodos} = n = \frac{7500}{900}$$

Períodos = 8,333..

Después del período 8 lo prestado por el banco supera los \$7500.

Como el banco se queda con el 10%

Lo retenido por el banco es de \$750.

SOLUCION 3

Como en el primer período el banco presta \$900 reteniendo \$100

En el segundo período el banco presta \$810 y retiene \$90

En el tercer período el banco presta \$729 y retiene \$81

Total prestado = $900 + 810 + 729 = 2439$

Como el banco retiene el 10% en cada período \$243,9

Total de períodos para llegar a los \$7500

$$\text{Períodos} = n = \frac{7500}{243,9} = 30,75$$

$$n = 30,75$$

Después del período 30 lo prestado por el banco supera los \$7500.

O sea en el período 31 lo prestado por el banco supera los \$7500

Como el banco se queda con el 10%

Lo retenido por el banco es de \$750 más un período de \$75 en total es de \$825.