Universidad Nacional de Lomas de Zamora

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS

ELEMENTOS

De

MATEMATICA

FRANJA MORADA
Económicas
Lomas

Lic. Miguel Angel Martínez
Coordinador área Matemática
Del Curso de Nivelación

FRANJA
MORADA
Económicas
Lomas

ASIGNATURA: ELEMENTOS DE MATEMÁTICA

Coordinador A/C: Lic . Miguel Angel Martínez

1. FUNDAMENTACIÓN Y JUSTIFICACIÓN

Son bien conocidas las deficiencias con que los alumnos egresan de la escuela media en el área matemática. No nos vamos a detener en las múltiples causas a las cuales responde, sino a tratar de paliar dentro del tiempo disponible el inconveniente que esto origina en la prosecución de estudios superiores. Por eso, entre los objetivos que se plantea el curso de nivelación se destaca primordialmente que los alumnos aspirantes a ingresar a la Facultad de Ciencias Económicas de la UNLZ adquieran un conjunto básico de habilidades intelectuales y de saberes específicos indispensables para poder abordar los estudios matemáticos propios de la carrera que piensan iniciar.

2. UBICACIÓN DE LA ASIGNATURA DENTRO DEL PLAN DE ESTUDIOS

La asignatura Elementos de Matemática constituye el primer espacio curricular del área matemática de las carreras de Contador Público y Licenciatura en Administración, siendo el nexo entre la enseñanza media y la universidad en cuanto a temas y habilidades específicas del conocimiento matemático. Es la introducción indispensable en la modificación de técnicas de estudio y rutinas de abordaje para el desarrollo de las materias específicas del espacio correspondiente, expandiéndose en cuanto a deducción y razonamiento a otras disciplinas de las carreras a las cuales los estudiantes aspiran a ingresar.

3. OBJETIVOS GENERALES

Dentro de las limitaciones que plantea el acotamiento temporal, podemos citar los objetivos generales que se pretenden alcanzar con el curso.

- Valorizar la Matemática como herramienta del pensamiento lógico-deductivo.
- Reconocer el papel que desempeña en la formación del profesional de las Ciencias Económicas.
- Descubrir los valores estéticos que tienen los objetos matemáticos.
- Comprender la armonía que tiene el edificio matemático.
- Descubrir la metodología de estudio adecuada para la disciplina.
- Enfrentar los problemas como desafíos al intelecto y la razón.
- Disfrutar con la resolución de problemas.

4. CONTENIDOS MÍNIMOS

- Conocer los conectivos lógicos, su representación y utilización en Matemática.
- Conocer los diferentes conjuntos numéricos y las propiedades de las operaciones definidas en los mismos.
- Operar con subconjuntos de reales y con intervalos definidos por inecuaciones, con o sin módulo.
- Incorporar los conceptos fundamentales del Algebra elemental.
- Saber definir dichos conceptos en forma coloquial y simbólica.
- Operar con las expresiones algebraicas enteras.
- Factorizar un polinomio lo más posible en los reales.
- Operar con las expresiones algebraicas fraccionarias.
- Fundamentar los pasos que permiten resolver ecuaciones enteras y fraccionarias con una incógnita.
- Hallar la solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Representar y obtener funciones lineales.
- Obtener la solución de sistemas de ecuaciones mixtos con dos incógnitas.

5. PROGRAMA ANALÍTICO DE LA MATERIA

Las unidades en las cuales podemos dividir el desarrollo del curso son:

UNIDAD 1

Conjuntos de números naturales, enteros, racionales y reales. Causas de ampliación de los diferentes conjuntos. Números decimales racionales e irracionales. Operaciones y propiedades con el significado de las mismas. Intervalos de reales. Definiciones y representación.

UNIDAD 2

Ecuaciones en R de grado uno. Propiedades. Inecuaciones en R. Propiedades. Módulo: definición y propiedades. Ecuaciones e inecuaciones con módulo.

UNIDAD 3

Expresiones algebraicas enteras: monomios y polinomios. Conceptos. Grado. Polinomio homogéneo. Polinomio completo y ordenado. Operaciones con polinomios: suma, resta, multiplicación y división. División por coeficientes separados. Regla de Ruffini. Teorema del resto.
Ceros de un polinomio. Factorización conociendo los ceros. Teorema de Gauss. Factor común y factor común en grupos. Cuadrado de un binomio y trinomio cuadrado perfecto. Cubo de un binomio y cuatrinomio cubo perfecto. Diferencia de cuadrados. Binomio homogéneo.

UNIDAD 4

Fracciones algebraicas. Simplificación. Mínimo común múltiplo de monomios y polinomios. Suma y resta de fracciones algebraicas. Multiplicación y división de las mismas.
Ecuaciones con una incógnita. Diferencia con identidades. Conjunto solución. Ecuaciones equivalentes. Propiedades de las ecuaciones. Ecuaciones enteras y fraccionarias. Grado de una ecuación. Ecuaciones de grado uno con una incógnita. Ecuaciones de segundo grado. Resolución factorizando. Fórmula.

UNIDAD 5

Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Sistemas lineales. Diferentes métodos de resolución. Representación gráfica. Sistemas mixtos de grado uno y dos.

6. BIBLIOGRAFÍA

El material bibliográfico básico utilizado en el desarrollo de las clases es el apunte editado en la Facultad de "Elementos de Matemática", realizado por Omar Levisman, el cual va acompañado de una "Guía de Trabajos Prácticos".
El mismo contiene una síntesis de definiciones y propiedades que el alumno debe obligatoriamente incorporar antes y durante el dictado de clases.
Como bibliografía complementaria se sugieren los textos que los alumnos poseen de la enseñanza media, sin especificar ninguno en particular por dos motivos: 1. ninguno se adapta totalmente a los requerimientos del curso; 2. evitar costos innecesarios.

7. CRITERIOS METODOLÓGICOS

Es importante en el desarrollo de las clases hacer hincapié en la adquisición por parte del alumnado de los conceptos teóricos de la Matemática. El alumno debe conocer los objetos con los cuales opera, reconocerlos por sus características y transformarlos en base a las propiedades que poseen. Esto requiere por parte de los docentes un trabajo de reconstrucción y en otros casos de construcción de conocimientos deficientemente adquiridos o no desarrollados en el paso de los alumnos por la enseñanza media. Asimismo el alumnado debe replantearse la metodología de estudio de la materia, comenzando por una incorporación adecuada y precisa de los términos y símbolos que definen a los objetos matemáticos con los cuales opera, de sus características definitorias, de las propiedades que poseen y de las relaciones que los vinculan. Posteriormente se puede hacer uso de estos entes matemáticos para operar con los mismos, nombrando las propiedades en las cuales se basa cada transformación realizada.
Para alcanzar los objetivos propuestos se requiere un trabajo intensivo por parte de los docentes en el aula, así como una concentración y voluntad de aprehensión por parte de los alumnos. Estos últimos deben completar la comprensión y fijación de los conocimientos

con la tarea que se proponga en el "campus virtual" y toda la que consideren necesaria utilizando libros y apuntes.

8. CRITERIOS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

Se realiza una evaluación continua por medio del interrogatorio dirigido en forma individual a los alumnos en cada clase. Es una metodología de trabajo para que los alumnos descubran falencias teóricas mal o deficientemente incorporadas. Esto obliga a una participación activa del alumnado en las clases y al descubrimiento de errores que al ser asumidos como tales permite su corrección. Los errores se socializan y permiten por el análisis grupal, conducido por el docente, hacer una nueva construcción correcta.
Para medir el rendimiento del curso se realiza en el último encuentro una evaluación escrita con respuestas múltiples, la cual se califica y permite al alumno tener una medida aproximada del nivel de conocimientos en que se encuentra para iniciar el curso de Matemática I., y al docente la efectividad de las clases dictadas.

FRANJA MORADA Económicas Lomas

PALABRAS PREVIAS

Este trabajo está dirigido a los estudiantes que se incorporan a la enseñanza universitaria de la Facultad de Ciencias Económicas de la U.N.L.Z. referente al área Matemática. El objetivo del mismo es presentar en forma resumida algunos conceptos, definiciones y propiedades de temas que se desarrollan normalmente en la enseñanza media, con la finalidad de repasarlos y en algunos casos ampliarlos. De esta forma las autoridades de esta casa de estudios y los docentes esperamos mejorar la preparación de los estudiantes que ingresan para que puedan cursar las materias de la carrera, alcanzando con éxito los objetivos planteados en las mismas. Al mismo tiempo nivelar el caudal de conocimientos con que cuentan los alumnos y de esta forma ayudar a aquellos que por diversas causas han tenido una formación incompleta al egresar de la escuela media. En esta tarea fundamental estamos involucrados docentes y alumnos. Cabe a estos últimos encarar las trabajos y actividades propuestas por los primeros con entusiasmo, seriedad y responsabilidad. En el nivel universitario la autodisciplina en el estudio y adquisición de habilidades por los alumnos, es de primordial importancia en la formación de los futuros profesionales.

En el área de la Matemática sabemos que existen muchas dificultades en la incorporación de conocimientos. Cuando el estudiante ha puesto trabajo y esfuerzo de su parte por aprender y los objetivos no se han logrado, debe replantearse la metodología de estudio que ha utilizado en esta disciplina.

Nuestra experiencia señala que gran parte de las dificultades que se originan al estudiar Matemática, al abordar la resolución de problemas y ejercicios, de los errores que se cometen, tienen como causa una deficiente comprensión del lenguaje y conceptos puestos en juego. Esto revela que los estudiantes no prestan la debida atención a lo que podemos denominar como "teoría" de la materia. En general dedican gran parte de su esfuerzo a adquirir métodos mecánicos para resolver cierto tipo de problemas, sin comprender que es lo que realmente están realizando. Esto trae aparejado que ante pequeñas modificaciones en los problemas no encuentran la forma de abordar la resolución de los mismos. El objetivo de la asignatura es desarrollar el pensamiento abstracto y aprender a relacionar diferentes métodos de resolución de problemas y seleccionar el más adecuado para cada situación. Esto es posible cuando se comprenden con claridad cada una de las herramientas matemáticas de que se dispone y que propiedades tienen las mismas.

Cuando se practica la ejercitación es aconsejable comenzar con ejercicios o problemas cuya resolución se hizo en clase o se incluye en los textos, comparando posteriormente el estudiante la que efectúa con la correcta. De esta forma se detectan los errores que se cometen y las interpretaciones inadecuadas, los que de esta forma pueden ser autocorregidos. Cumplida esta etapa se puede pasar a la resolución de problemas y ejercicios de los cuales se conoce o no la respuesta.

También hay que tener presente que la solución hallada debe ser sometida a prueba o verificación. Esto permite detectar errores que se cometen accidentalmente y ante una revisión de la resolución salvarlos. En la actividad profesional futura adquirir este hábito les puede evitar muchos dolores de cabeza.

El tiempo siempre resulta escaso para el dictado de la materia, por lo cual es importante el tiempo extra que deben agregar de su parte, trabajando solos o en equipo.

Son nuestros deseos que este trabajo y el pequeño curso encarado les sean de utilidad para sus estudios futuros, y que al final del mismo se encuentren un escalón más arriba

en sus conocimientos y habilidades. Agradeceremos nos hagan llegar, tanto los colegas como los estudiantes, todas las sugerencias que crean convenientes para modificar o agregar todo aquello que consideren adecuado para lograr un mejor alcance de los objetivos propuestos.

Finalmente:

¡BIENVENIDOS A LA FACULTAD Y MUCHOS ÉXITOS¡

FRANJA MORADA
Económicas
Lomas

Símbolos matemáticos más usuales

$\in$	*pertenece*
$\notin$	*no pertenece*
$\Rightarrow$	*implicación*
$\Leftrightarrow$	*si y solo si, equivalencia*
$\exists$	*existe*
$\forall$	*para todo, cualquiera sea*
$\wedge$	*y, conjunción*
$\vee$	*o , disyunción*
$\cup$	*unión*
$\cap$	*intersección*
$\subset$	*inclusión*
$\varnothing$	*conjunto vacío*
$\leq$	*menor o igual*
$\geq$	*mayor o igual*
$<$	*menor*
$>$	*mayor*
∞	*infinito*
π	*número pi*
$\mathbb{R}$	*conjunto de reales*
$\mathbb{Z}$	*conjunto de enteros*
$\mathbb{C}$	*conjunto de complejos*
$\mathbb{Q}$	*conjunto de racionales*
$\mathbb{N}$	*conjunto de naturales*
$\neq$	*no es igual*
$=$	*es igual*
$\not\subset$	*no incluido*
Σ	*sumatoria*
$\{\ ;\ \}$	*conjunto*
$(\ ;\ )$	*par ordenado*
/	*tal que*

FRANJA MORADA Económicas Lomas

h

Conjuntos numéricos

Naturales

El conjunto numérico básico es el de los <u>números naturales</u>. Está formado por los números que inicialmente creó el ser humano y que constituyen los primeros que aprendemos en la vida. Su evolución hasta como los conocemos actualmente demandó varios milenios. Cada uno posee un nombre y un símbolo: 1 uno, 2 dos, 3 tres, etc. El conjunto de todos ellos se representa con la letra **N**. Para escribir los elementos de un conjunto los colocamos uno al lado de otro, separados por comas y encerrados entre llaves

$$\mathbf{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,.....\}$$

Observar que cero no es un número natural. Para representar la nada, lo vacío, demandó tiempo a la humanidad, y tampoco lo aprendemos cuando se enseña a contar en nuestros primeros años de vida.
Cuando le agregamos a los naturales el cero, tenemos un nuevo conjunto que denominamos $\mathbf{N_0}$

$$\mathbf{N_0} = \mathbf{N} \cup \{\mathbf{0}\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,.....\}$$

Recordemos que: $\in$ significa *pertenece*; $\notin$ significa *no pertenece.*
Ejemplos: $1 \in \mathbf{N}$; $2/3 \notin \mathbf{N}$; $0 \notin \mathbf{N}$; $0 \in \mathbf{N_0}$

Los naturales se utilizan para *contar* los elementos de un conjunto que sea *finito* o *infinito numerable*.
Algunas propiedades del conjunto de naturales son:

- Existen infinitos números naturales.
- Existe una relación de orden natural que permite decidir, dados dos números naturales diferentes cualesquiera, cual es menor de los dos. Podemos ordenarlos formando una *cadena.*

  $$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < .....$$

- Existe un primer número natural

  $\forall x \in N \quad \exists 1 \in N \ / \ 1 \leq x$ ($\forall$ significa *para todo, cualquiera sea*)

  Todo número natural tiene un siguiente (la barra / significa *tal que*)

  si $n \in N \quad \exists (n+1) \in N \ / \ n+1$ es el siguiente de n
- Todo número natural tiene un precedente, salvo 1 que es el primero

  $\forall n \in \mathbf{N} - \{1\} \quad \exists (n-1) \in N \ / \ n-1$ es el precedente de n
- Entre dos naturales cualesquiera existe una cantidad finita de naturales. Si son consecutivos no hay ningún natural entre ellos (esto se expresa diciendo que es un conjunto *discreto*)

Operaciones en $\mathbf{N_0}$

Con los naturales se realizan operaciones binarias. Una *operación binaria* en un conjunto hace corresponder a *todo par ordenado* de elementos del conjunto, otro elemento del conjunto que es el *resultado* de la operación.
La primera es la <u>adición</u>

$a + b = c$ con a , b , c naturales, llamándose a y b *sumandos* y c *suma*

En una operación binaria solamente se pueden componer los elementos de a pares. Cuando se opera con varios números utilizando una operación binaria determinada, se debe indicar con paréntesis como se asocian de a dos. Si la forma en que se agrupan no influye en el resultado, la operación tiene la propiedad *asociativa*.

La forma simbólica de expresar que la adición es asociativa es:

$$\forall a \in \mathbf{N_0} \quad \forall b \in \mathbf{N_0} \quad \forall c \in \mathbf{N_0} \qquad (a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$

Otra propiedad de la adición es la *conmutativa*. Alteramos el orden del par dado y operamos de las dos formas posibles. Si se obtiene el mismo resultado cualquiera sea el par que tomamos, la operación tiene la propiedad conmutativa.

En símbolos $\forall a \in \mathbf{N_0} \quad \forall b \in \mathbf{N_0} \quad a + b = b + a$

Se expresa diciendo *el orden de los sumandos no altera la suma.*

En la operación considerada puede que exista un elemento del conjunto que al operar con cualquier otro del mismo conjunto no modifica a este último. Cuando existe, se dice que la operación tiene elemento neutro. La propiedad se llama *existencia de elemento neutro*.

En el conjunto $\mathbf{N_0}$ el cero desempeña el papel de *elemento neutro* de la adición

$$\exists 0 \in \mathbf{N_0} \quad / \quad \forall a \in \mathbf{N_0} \qquad a + 0 = 0 + a = a$$

La operación que se deriva de la adición es la *sustracción* la cual se define como sigue: "restar a un número natural **a** otro **b** consiste en hallar un tercero **c** tal que sumado al segundo **b** de por resultado **a.**

$$a \in \mathbf{N_0} \quad b \in \mathbf{N_0} \quad a - b = c \quad \text{tal que} \quad c + b = a$$

donde a se llama *minuendo*, b *sustraendo* y c *diferencia.*

$$14 - 6 = 8 \quad \text{pues} \quad 8 + 6 = 14$$

Pregunta:

¿En $\mathbf{N_0}$ la sustracción es siempre posible?.

Rta.:

No, el minuendo no puede ser menor que el sustraendo. Solo es posible la sustracción en $\mathbf{N_0}$, cuando el minuendo es mayor o igual que el sustraendo. En símbolos

$(a - b) \in \mathbf{N_0} \Leftrightarrow a \geq b$ (el símbolo $\Leftrightarrow$ se lee "si y solo si" y significa equivalencia).

Enteros

Por esta limitación se crearon otros números que se llaman *enteros*. El conjunto de los mismos incluye a los elementos de **N** y al cero. Todo número entero distinto de cero consta de dos partes: el *signo* y el *módulo* o *valor absoluto*.

Este conjunto numérico se simboliza con **Z**.

$$\mathbf{Z} = \{.....-3 ; -2 ; -1 ; 0 , 1 ; 2 ; 3 ; .....\}$$

Existen tres clases de números enteros, los *positivos*, los *negativos* y el *cero*.

$\mathbf{Z^+} = \mathbf{N}$ enteros positivos ; $\mathbf{Z^-}$ enteros negativos ; $\{\mathbf{0}\}$

Como los enteros positivos son equivalentes a los naturales, los mismos se escriben como naturales quedando el signo en forma tácita: $+16 = 16$

Módulo

El módulo se define de la siguiente forma.

$$|x| = x \quad \text{si } x \geq 0 \quad , \quad |x| = -x \quad \text{si } x < 0$$

Si el número es positivo o cero, el módulo es igual a dicho número. Si es negativo se le cambia el signo, se toma el opuesto.

Por lo tanto el módulo nunca es negativo: $|x| \geq 0 \quad \forall x \in Z$

Ejemplos:

$|-8| = -(-8) = 8$ pues $-8 < 0$

$|+16| = +16 = 16$ pues $16 \geq 0$

$|0| = 0$ pues $0 \geq 0$

Igualdad y desigualdad

Dos enteros son iguales cuando tienen el mismo signo e igual módulo. De dos enteros de *diferente signo* es *mayor* el que es *positivo*. Si son los *dos positivos* es *mayor* el de *mayor módulo*. Si ambos *son negativos* es *mayor* el de *menor módulo*.

El cero es menor que cualquier número positivo y mayor que cualquier número negativo. Por lo tanto se escribe:

"x es positivo" simbólicamente $x > 0$

"x es negativo" simbólicamente $x < 0$

"x no es positivo" simbólicamente $x \leq 0$

"x no es negativo" simbólicamente $x \geq 0$

Números opuestos

Dos números *son opuestos* cuando tienen *igual módulo* y *diferente signo*.

Ejemplos: -8 y 8

Cuando escribimos la variable **x** que representa a un entero, no podemos decir que el mismo es positivo, negativo o cero, pues no sabemos que valor toma. Cuando ponemos $-x$ ocurre lo mismo. El signo menos significa que al valor que tenga **x** se lo debe cambiar de signo. Por lo tanto $-x$ representa al opuesto de **x**. Si $x = -6$ entonces $-x = 6$.

Todo entero tiene un opuesto que sumados da por resultado el neutro de la adición, o sea cero. Esta propiedad se llama existencia de opuesto o simétrico.

En símbolos se escribe

$$\forall x \in Z \quad \exists (-x) \in Z \quad / \quad x + (-x) = (-x) + x = 0$$

Propiedades de la adición en Z

En total la adición en los enteros posee cuatro propiedades: asociativa, conmutativa, existencia de neutro y existencia de opuesto.

Reglas de la adición en Z

Las reglas para realizar la adición de enteros son:

- *La adición de varios enteros todos del mismo signo da otro entero, cuyo signo es el mismo de los sumandos y su módulo es la suma se los módulos de los sumandos.*
- *La adición de dos enteros de diferente signo da otro entero cuyo signo es igual al signo del sumando de mayor módulo, y su módulo es la diferencia entre los módulos de los sumandos.*

- *Para sumar varios enteros de signos cualesquiera se aplican las propiedades conmutativa y asociativa, agrupándose los positivos por un lado y los negativos por otro. Se obtiene la suma de cada grupo aplicando la regla primera. Finalmente se llega a la suma de un negativo con un positivo que se resuelve aplicando la segunda regla.*
- *Si aparecen opuestos se pueden suprimir pues su suma da cero. Esto se llama simplificación.*

Ejemplos:

1) $(-8)+(-25)+(-64)+(-12)=-(8+25+64+12)=-109$

2) $(+34)+(+23)+(+17)+(+8)=+(34+23+17+8)=+82=82$

3) $(-37)+(+53)=+(53-37)=+16=16$

4) $(+85)+(-125)=-(125-85)=-40$

5) $(-8)+(+34)+(-19)+(-23)+(+43)=\{(-8)+(-19)+(-23)\}+\{(+34)+(+43)\}=$
$=(-50)+(+77)=27$

6) $-32+234-67+56-23-73+25=(234+56+25)-(32+67+23+73)=$
$=315-195=120$

Sustracción en Z

La *sustracción* de enteros se realiza transformándola en una adición. Para ello *se le suma al minuendo el opuesto del sustraendo*. Todo lo que esté restando se puede poner sumando poniendo en su lugar el opuesto. Es decir: $x-y=x+(-y)$

Ejemplos:

1) $(-8)-(-43)=(-8)+(+43)=+(43-8)=35$

2) $(+15)-(-32)=(+15)+(+32)=+(15+32)=47$

3) $(-26)-(+45)=(-26)+(-45)=-(26+45)=-71$

4) $(+63)-(+324)=(+63)+(-324)=-(324-63)=-261$

Multiplicación

La multiplicación de naturales se define como un caso particular de la adición. Esto ocurre cuando todos los sumandos son iguales. *Multiplicar un natural por otro equivale a sumar tantos sumandos iguales a uno de ellos como lo indica el otro.*

Ejemplo: multiplicar 3 por 5 significa sumar 5 sumandos iguales a 3, o sumar 3 sumandos iguales a 5

$$3.5=5+5+5=15 \quad \text{ó} \quad 3.5=3+3+3+3+3=15$$

En la práctica se memorizan las multiplicaciones de los naturales menores o iguales a 9 (llamadas tablas de multiplicar) y se aplica el algoritmo de la multiplicación en el sistema de numeración decimal. Los números que intervienen en una multiplicación se llaman *factores* y el resultado *producto*. Esta operación tiene las propiedades:

- Conmutativa: el orden de los factores no altera el producto.

$$\forall x \in N \quad \forall y \in N \quad x.y=y.x$$

- Asociativa: para multiplicar varios naturales se los agrupa de a dos (la multiplicación es una operación binaria) y la forma en que se los asocie no modifica el resultado final.

$$\forall x \in N \quad \forall y \in N \quad \forall z \in N \quad (x.y).z = x.(y.z) = x.y.z = xyz$$

- Existencia de elemento neutro: existe el número natural 1 que multiplicado por cualquier otro natural da por resultado este natural. El 1 es el neutro de la multiplicación.

$$\forall x \in N \quad \exists 1 \in N \quad / \quad 1.x = x.1 = x$$

Cuando se combinan dos operaciones definidas en un conjunto, es necesario indicar cual se realiza primero. Supongamos las operaciones representadas con los símbolos $\oplus$ y $*$. La expresión $x \oplus y * z$ es ambigua, pues no se sabe si efectuar primero $\oplus$ y luego $*$ o al revés. Para indicar qué se realiza primero empleamos paréntesis o algo equivalente, como corchetes o llaves. Si escribimos $(x \oplus y) * z$ se opera primero dentro del paréntesis realizando $\oplus$, y luego el resultado obtenido se opera con **z** de acuerdo a la operación $*$. Si en cambio la expresión es $x \oplus (y * z)$ calculamos primero $y * z$, y posteriormente se opera **x** con el resultado anterior, utilizando la operación $\oplus$. Tener siempre presente que no se cambia el orden en que se dan los números, pues no se sabe si las operaciones $\oplus$ y $*$ son conmutativas.

Cuando podemos alterar el orden dado de las operaciones, sin que se altere el resultado, se dice que la segunda operación (la que se realiza en segundo lugar) es distributiva con respecto a la primera (la que está encerrada entre paréntesis).

En símbolos:

$(x \oplus y) * z = (x * z) \oplus (y * z)$ la operación $*$ es distributiva con respecto a $\oplus$.

$x \oplus (y * z) = (x \oplus y) * (x \oplus z)$ la operación $\oplus$ es distributiva con respecto a $*$.

Si ahora combinamos la multiplicación con la adición en el conjunto **N** tenemos estas posibilidades:

$(x + y) \cdot z$ (primero + y luego $\cdot$)

cambiamos el orden de realización $(x \cdot z) + (y \cdot z)$ (primero $\cdot$ y luego +)

Cualesquiera sean los números naturales x, y, z ambas expresiones dan lo mismo. Luego la multiplicación es distributiva con respecto a la adición, o sea

$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$$

Con un contraejemplo se puede ver que al revés no es válido, es decir la adición no es distributiva con respecto a la multiplicación

$(3.4) + 5 \neq (3 + 5).(4 + 5)$ ya que $(3.4) + 5 = 12 + 5 = 17$ y $(3 + 5).(4 + 5) = 8.9 = 72$

También la multiplicación de naturales es distributiva con respecto a la sustracción

$$(x - y).z = (x.z) - (y.z)$$

Para reducir la escritura de paréntesis, en Matemática se adopta una convención.

Cuando no están indicadas con paréntesis que operaciones se efectúan primero e intervienen sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, se realizan primero las multiplicaciones y divisiones, y posteriormente las sumas y restas.

Con esta convención escribimos lo anterior de esta forma:

$$(x+y).z = x.z + y.z \qquad (x-y).z = x.z - y.z$$

(observar que hay paréntesis que no se colocaron pero se sobreentienden)

Multiplicación de enteros

El producto de dos enteros se define de forma tal que permanezcan en **Z** las mismas propiedades de la multiplicación que en **N**. Esto se expresa como *permanencia de las leyes formales*.

El producto de dos enteros es otro entero. Luego tiene signo y módulo. El signo se obtiene aplicando la llamada regla de los signos, la cual podemos enunciar diciendo que *si los dos factores son del mismo signo el producto es positivo, y si son de diferente signo es negativo*. En cuanto al módulo el mismo *es igual al producto de los módulos de los factores.*

$$sig(x.y) = + \quad \text{si} \quad sig(x) = sig(y) \quad \wedge \quad sig(x.y) = - \quad \text{si} \quad sig(x) \neq sig(y)$$

$$|x.y| = |x|.|y|$$

Ejemplos:

1) $(-12).(-8) = +(12.8) = 96$ 2) $(-32).(+25) = -(32.25) = -800$

3) $(+135).(-12) = -(135.12) = -1620$ 4) $(+52).(+85) = +(52.85) = +4420$

Cuando se multiplican más de dos enteros se aplican las propiedades conmutativa y asociativa. Teniendo en cuenta a los factores negativos, agrupados de a dos, su producto es positivo. Si la cantidad de factores negativos es *par*, tenemos todos factores positivos luego de asociarlos de a dos. Luego el producto final es positivo. Si la cantidad de factores negativos es *impar* al agruparlos de a dos sobra uno que al ser negativo, hace que el producto final de negativo. Podemos así enunciar la regla de signos generalizada: *el signo del producto de varios enteros se obtiene contando la cantidad de factores negativos. Si es par el resultado es positivo y si es impar es negativo.*

En cuanto al *módulo* se calcula *multiplicando los módulos de todos los factores.*

1) $(-12).(+85).(-8).(-1).(+2).(-1) = +(12.85.8.1.2.1) = +16320$

Como hay 4 (par) factores negativos da positivo

2) $(+6).(+5).(-8).(-11).(+2).(-10) = -(6.5.8.11.2.10) = +52800$

Al haber 3 (impar) factores negativos da negativo

Producto por cero

La *multiplicación por cero se define como cero* para que se mantenga la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la sustracción en todos los casos.

Tenemos $(z-y).x = z.x - y.x$. Si consideramos el caso en que minuendo y sustraendo son iguales: $z = y$. Sustituyendo $(y-y).x = y.x - y.x \Rightarrow 0.x = 0$.

Es decir: $\forall x \quad x.0 = 0.x = 0$

Al cero se lo puede llamar *elemento absorbente* de la multiplicación.

En el conjunto **Z** son siempre posibles las operaciones de *adición*, *sustracción* y *multiplicación.*

$$\forall a \in Z \quad \forall b \in Z \qquad \exists (a+b) \in Z\,, \quad \exists (a-b) \in Z\,, \quad \exists (a.b) \in Z$$

Por este motivo estas operaciones se llaman *operaciones enteras*

Múltiplo

El concepto de múltiplo se define de la siguiente forma: *un número entero **a** se dice que es múltiplo de otro entero **b** si y solo si existe otro entero c, tal que multiplicado por **b** da por resultado **a**.*

Que a es múltiplo de b se simboliza $a = \dot{b}$. Ejemplos:

1) (-8) es múltiplo de 4 pues existe $(-2) \in Z$ tal que $(-2)4.$ da (-8)

2) $(+169) = (\dot{-13})$ *pues* $\exists (-13) \in Z \ / \ (-13).(-13) = 169$

3) $3125 = \dot{25}$ *pues* $\exists 125 \in Z \ / \ 125.25 = 3125$

La cantidad de múltiplos de un número entero es infinita. El conjunto de múltiplos de un número entero a se obtiene multiplicando al entero dado por cada uno de los enteros.

$$\text{múltiplos de } a = \{x \in Z \ / \ \exists k \in Z \ \wedge \ x = k.a\} = Z_a$$

Cuando un número es múltiplo de 2 se dice que ese número es par. Los múltiplos de 2 constituyen el conjunto de los pares.

$$\text{múltiplos de } 2 = \{x \in Z \ / \ \exists k \in Z \ \wedge \ x = 2.k\} = \left\{x \in Z \ / \ x = \dot{2}\right\} = Z_2$$

La suma o resta de dos múltiplos de un mismo número da por resultado otro múltiplo del ese número. Sumando o restando pares se obtiene otro par. Sumando o restando impares se obtiene un par. Sumando o restando par con impar resulta un impar.

$$par \pm par = par \quad ; \quad impar \pm impar = par \quad ; \quad par \pm impar = impar$$

División en Z

La división es una operación que se deriva de la multiplicación. En esta última operación se conocen los factores y se pide hallar el producto. Un problema diferente es conocer uno de los factores y el producto, pidiendo hallar el otro factor. Esto da origen a la nueva operación que se denomina división. Designando con **x** al número desconocido podemos simbolizar con ejemplos estos dos problemas

$(-43).32 = x$ problema de la multiplicación

$(-24).x = 120$ problema de la división

El número desconocido se escribe solo en un miembro de la igualdad (se despeja), y para ello se crea un nuevo símbolo para la nueva operación. Este es : (dos puntos) ó ÷(dos puntos separados por una barra). El producto se escribe primero, luego el símbolo operacional, y finalmente el factor conocido. Es decir:

$120 : (-24) = x$ es equivalente a poner $(-24).x = 120$

Los datos del nuevo problema cambian de nombre. El producto (escrito primero) se llama *dividendo* y el factor conocido (el segundo) se llama *divisor*. El resultado es el *cociente*.

La definición general de división es: *dividir el entero a por el entero b consiste en hallar un tercer entero c tal que multiplicado por b de por resultado a .*

$$a:b=c \Leftrightarrow c.b=a \quad \text{siendo} \quad a \text{ dividendo};\ b \text{ divisor};\ c \text{ cociente}$$

Ejemplo: $(-20):(+5)=-4$ porque $(-4).(+5)=-20$
No existen en Z divisiones como $(-17):(-4)$ y $8:0$ pues no hay ningún entero que multiplicado por (-4) de por resultado (-17) ni tampoco un entero que multiplicado por cero de 8.
La división no siempre es posible en el conjunto de los enteros. Para que la división sea realizable en Z, el módulo (o valor absoluto) del dividendo debe ser múltiplo del módulo del divisor y además el divisor tiene que ser diferente de cero.

$$a \in Z \quad b \in Z \quad \exists (a:b) \in Z \Leftrightarrow b \neq 0 \wedge |a| = \dot{|b|}$$

Cuando un número entero **a** es múltiplo de otro entero **b** podemos decir que **b** es divisor de **a**, lo cual se simboliza **b|a.**

$$b \mid a \Leftrightarrow a = \dot{b} \Leftrightarrow \exists c \in Z \ / \ c.b = a$$

Ejemplos: $6|72$; $-4|120$; $24|120$; $11|462$

En el sistema de numeración decimal un número es *divisible por dos* cuando la cifra de las unidades es par (o sea que termina en 0; 2; 4; 6; 8). Es *divisible por tres* si la suma de las cifras da un múltiplo de tres. Es *divisible por cinco* si la cifra de las unidades es 0 o 5.
Si un número es divisible por otros dos, entonces es divisible por su producto. Si es divisible por 2 y 3, es divisible por 6.
Todo número es divisible por 1 y por si mismo. Todo número natural tiene un conjunto de divisores que es finito, no vacío, y siempre están el 1 y el mismo número.
Ejemplos:

1) *divisores de* $12=\{1;2;3;4;6;12\}$ en **N.**
2) *divisores de* $36=\{1;2;3;4;6;9;12;18;36\}$ en **N.**

Cuando se trata de un número entero se agregan los divisores negativos a los anteriores

3) *divisores de* $12=\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm12\}$ en **Z.**
4) *divisores de* $36=\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm9;\pm12;\pm18;\pm36\}$ en **Z.**

Número primo

Si los divisores de un número natural son únicamente uno y el mismo número, se lo denomina *número primo absoluto*. En caso contrario es un *número compuesto*.
Los primeros naturales primos son: 2; 3; 5; 7; 11, 13; 17; 19; 23;.....etc. La cantidad de primos es infinita; siempre existe otro primo mayor a uno dado.
Los números compuestos se pueden escribir como multiplicación de números primos, llamándose a este proceso *descomposición en factores primos*. Ejemplo de esto es:

$$168=2^3.3.7; \quad 169=13^2; \quad 15750=2.3^2.5^3.7$$

Primos relativos o coprimos

Dos números naturales se dicen que son *coprimos* cuando no tienen divisores comunes diferentes de 1 (se excluye al 1 por ser divisor de todos). Ejemplos:

1) 12 y 17 2) 77 y 36 3) 24 y 175

Una forma de comprobarlo es descomponiéndolos en factores primos y ver que *no tienen factores comunes a ambos.*

1) 12 y 17	resulta	$12 = 2^2.3$	$17 = 17$;
2) 77 y 36	factorizados	$77 = 7.11$	$36 = 2^2.3^2$;
3) 24 y 175	factorizados	$24 = 2^3.3$	$175 = 5^2.7$

Racionales

Como en el conjunto de los enteros la división no siempre es posible se amplia el campo numérico creando un conjunto de números que incluya a los ya conocidos y donde podamos dividir en los casos donde el dividendo no es múltiplo del divisor.
Ese conjunto se llama de *números racionales* y se representa con Q.

$$Q = \left\{ .....; -2; -1; 0; 1; 2; .....; \frac{1}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{175}{312}; .... \right\}$$

Todo racional se puede expresar como un par ordenado de enteros, llamándose al primero numerador y al segundo denominador.

$\frac{a}{b}$ siendo **a** numerador y **b** denominador

Los enteros son los que tiene denominador 1, o sea $\frac{a}{1} = a$. A los números que se agregan a los enteros para formar los racionales se los llama *fraccionarios* y a la forma de escribirlos se la denomina *fracción.* Es decir que tenemos dos clases de racionales: los enteros y los fraccionarios.

Igualdad de fracciones

Dos fracciones son iguales (representan al mismo número racional) cuando los productos cruzados son iguales (el numerador de la primera por el denominador de la segunda es igual al denominador de la primera por el numerador de la segunda). En símbolos es : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$. Ejemplo: $\frac{5}{7} = \frac{60}{84} \Leftrightarrow 5.84 = 7.60 \Leftrightarrow 420 = 420$

Si la fracción es negativa consideramos al numerador negativo y al denominador positivo. Ejemplo: $-\frac{15}{17} = -\frac{60}{68} \Leftrightarrow (-15).68 = 17.(-60) \Leftrightarrow -1020 = -1020$

Hay infinitas fracciones iguales a una dada. Se las obtiene multiplicando o dividiendo al numerador y al denominador por un mismo número entero diferente de cero.

$$\frac{3}{5} = \frac{3.2}{5.2} = \frac{6}{10} = \frac{3.3}{3.5} = \frac{9}{15} = ... = \frac{3.n}{5.n} \quad \text{con} \quad n \in Z - \{0\}$$

En el caso de dividir se lo debe hacer por un divisor común al numerador y al denominador, hasta llegar a números *coprimos*.

$$\frac{90}{150}=\frac{90:2}{150.2}=\frac{45}{75}=\frac{45:3}{75:3}=\frac{15}{25}=\frac{15:5}{25:5}=\frac{3}{5}$$

Se obtiene así una fracción irreducible. Una fracción se llama *irreducible* cuando el numerador y el denominador no tienen divisor común, exceptuando 1. En una fracción irreducible el numerador y el denominador son primos entre si.

Desigualdad de fracciones

¿Cuándo una fracción es mayor o menor que otra? Para saberlo se comparan los productos cruzados del numerador de la primera por el denominador de la segunda, con el del denominador de la primera por el numerador de la segunda (cuando la fracción es negativa, este signo se atribuye al numerador). En símbolos:

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d<b.c \qquad \frac{a}{b}>\frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d>b.c$$

Ejemplos:

$$\frac{12}{17}<\frac{7}{9} \Leftrightarrow 12.9<17.7 \Leftrightarrow 108<119$$

$$-\frac{13}{15}<-\frac{19}{23} \Leftrightarrow (-13)23<15.(-19) \Leftrightarrow -299<-285$$

$$-\frac{11}{8}>-\frac{23}{11} \Leftrightarrow (-11).11>8.(-23) \Leftrightarrow -121>-184$$

Si una fracción es positiva y la otra negativa se sabe que la negativa es menor que la positiva.

Entre los enteros y los racionales hay una diferencia importante. Dados dos enteros cualesquiera, entre los mismos la cantidad de enteros comprendidos es siempre finita. Si **a** y **b** son dos enteros con la condición que **a** < **b**, hay exactamente **b** – **a** – **1** enteros que son mayores que **a** y menores que **b**. Por ejemplo entre (-5) y 23 hay $23-(-5)-1=27$ enteros. Esta propiedad se expresa diciendo que el conjunto **Z** es *discreto*.

En cambio en el conjunto **Q** de los racionales no se cumple esta propiedad, ya que la cantidad de racionales entre otros dos cualesquiera es siempre infinita. Dados dos números racionales diferentes siempre es posible encontrar otro racional entre ambos. Este puede ser el promedio de los anteriores o el racional que tiene como numerador la suma de los numeradores y como denominador la suma de los denominadores.

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}<\frac{c}{d} \quad ; \quad \frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

Con el segundo procedimiento es fácil escribir fracciones comprendidas entre dos fracciones dadas, tantas como queramos.

$$\frac{2}{3}<\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{2}{3}<\frac{6}{8}<\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{2}{3}<\frac{5}{7}<\frac{3}{4}<\frac{7}{9}<\frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}<\frac{7}{10}<\frac{5}{7}<\frac{8}{11}<\frac{3}{4}<\frac{10}{13}<\frac{7}{9}<\frac{11}{14}<\frac{4}{5} \quad \text{y así sucesivamente.}$$

Decimos que el conjunto de los racionales es *denso*.

Para que un conjunto totalmente ordenado *sea denso* entre dos elementos cualesquiera debe haber infinitos elementos.

Representación de los racionales

Para representar gráficamente a los racionales se emplea un **eje**.
Un eje es una recta en la cual se ha determinado un punto cualquiera de la misma como "*origen*", se toma uno de los dos sentidos posibles como "*sentido positivo*" y se adopta un "*segmento unitario*" como unidad de longitud, el cual se elige arbitrariamente.

Por medio de un eje de abcisas se hace corresponder a cada número un punto de la recta y viceversa.

De esta forma resultan sinónimos *punto* y *número*. Esta es la idea básica de la Geometría Analítica que fue introducida por el matemático y filósofo Rene Descartes. Su apellido en latín se escribía Cartesius, del cual se deriva la palabra *cartesiano* que se agrega al nombre del eje, el cual se llama *eje cartesiano* en homenaje a su creador.
El punto señalado en el eje determina con el origen un segmento orientado (del origen hacia el punto). Su longitud se mide con el segmento unitario, dando un número positivo al cual se le agrega un signo de acuerdo a las orientaciones del eje y del segmento (de igual sentido *positivo*, de sentidos diferentes *negativo*).
La representación de los enteros da por resultado puntos aislados del eje, separados con el anterior y el siguiente una distancia igual al segmento tomado como unidad. Al agregar las fracciones, entre dos enteros consecutivos hay infinitos puntos que corresponden a las infinitas fracciones que hay entre ambos.
Surge la pregunta ¿los números racionales cubren a todos los puntos de un eje?
Intuitivamente pareciera que si, pero la respuesta es negativa. Ya los pitagóricos varios siglos antes de Cristo habían llegado a esta conclusión. A pesar que el conjunto de los racionales es *denso* no cubre a todos los puntos del eje.
Los puntos sin "cubrir" con los racionales son muchísimos más que los cubiertos.
Se demuestra en Matemática que la cantidad de naturales es la misma que la de enteros, y la de enteros la misma que la de racionales. Esta cantidad es infinita y se llama *infinito numerable,* para diferenciarla de otros infinitos que no son numerables. Hay diferentes tipos de infinitos, siendo el más simple el de los naturales.
En los conjuntos infinitos no vale que *el todo es mayor que la parte*. Un conjunto puede estar incluido en otro y ambos tener la misma cantidad de elementos. Por ejemplo: hay tantos números pares como números naturales.

Operaciones con racionales

Las operaciones que son siempre posibles en Q son: *adición*, *sustracción*, *multiplicación* y *división* (salvo por cero).
Adición y sustracción.
Para sumar o restar fracciones las mismas deben tener el mismo denominador. Se deja el mismo denominador y se opera con los numeradores como números enteros. Es decir:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}. \qquad \text{Ejemplo: } \frac{3}{8}+\frac{7}{8}+\left(-\frac{5}{8}\right)=\frac{3+7+(-5)}{8}=\frac{5}{8}$$

Si tienen diferente denominador se obtienen fracciones iguales a las dadas, todas con el mismo denominador. Este proceso se llama *reducción a común denominador*. Si el denominador común es el menor posible se lo denomina *mínimo común denominador*.

El *común denominador* es un múltiplo común de todos los denominadores. Si es el menor posible es el *mínimo común múltiplo* que pasa a llamarse *mínimo común denominador*.
El *mínimo común múltiplo* de varios números se calcula descomponiendo a cada uno en factores primos, y luego tomando los factores comunes y no comunes (repetidos o no) con el exponente más grande al que aparezcan.

Ejemplo: hallar el mínimo común múltiplo de 24; 20 y 126.
Se descompone a cada uno en factores primos (se los factoriza) resultando:

$$24 = 2^3.3 \qquad 20 = 2^2.5 \qquad 126 = 2.3^2.7$$

El m.c.m. es: $\text{m.c.m}(24;20;126) = 2^3.3^2.5.7 = 2520$

Obtenido el común denominador, el mismo se divide por cada uno de los denominadores de las fracciones dadas y el resultado se multiplica por el correspondiente numerador. Resultan así los números que van en el numerador de la fracción final. Operando con ellos se llega al resultado. Este se debe expresar como una fracción irreducible. En símbolos es:

$$\forall \frac{a}{b} \in Q; \quad \forall \frac{c}{d} \in Q \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-cb}{bd}$$

Ejemplos:

1) $\frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{2.4+3.5}{3.4} = \frac{23}{12}$

2) $\frac{2}{3} - \frac{7}{4} + \frac{3}{20} = \frac{2.2^2.5 - 7.3.5 + 3.3}{3.2^2.5} = \frac{40-105+9}{60} = -\frac{56}{60} = -\frac{14}{15}$

3)

$$\frac{5}{24} - \frac{11}{20} + \frac{25}{126} = \frac{5}{2^3.3} - \frac{11}{2^2.5} + \frac{25}{3^2.7.2} = \frac{3.5^2.7 - 11.2.3^2.7 + 2^2.5^3}{2^3.3^2.5.7} = \frac{525-1386+500}{2520} = -\frac{361}{2520}$$

Lo importante es *tener presente el mecanismo de la operación* para luego operar en Algebra en forma similar. Cuando se trata de fracciones numéricas la calculadora realiza rápidamente la operación.

Multiplicación

La multiplicación de varios racionales da por resultado otro racional que tiene signo y módulo. El signo se obtiene aplicando la ya vista regla de los signos. Se cuentan los factores negativos. Si es par, el resultado es positivo y si es impar es negativo.
El módulo se obtiene multiplicando los módulos de los factores. El numerador tiene por módulo el producto de los módulos de los numeradores dados. En forma similar se procede con los denominadores.

En símbolos: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Ejemplos:

1) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

2) $\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{20}{7}\right)\frac{11}{2}\left(-\frac{1}{22}\right)=-\frac{3.20.11.1}{5.7.2.22}=-\frac{3}{7}$

División

La división se transforma en multiplicación multiplicando la primera fracción (dividendo) por la recíproca de la segunda (divisor).
El *recíproco* de un racional es otro racional que multiplicado por el primero da por resultado el neutro de la multiplicación, o sea 1.

Recíproco de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$ pues $\frac{a}{b}.\frac{b}{a}=\frac{ab}{ab}=1$. El recíproco se obtiene permutando numerador con denominador.

La división en general se simboliza $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$. Como existe siempre el recíproco de toda fracción diferente de cero, *la división en Q siempre se puede realizar si el divisor no es cero.*
Ejemplos:

1) $\frac{11}{32}:\frac{55}{56}=\frac{11}{32}\cdot\frac{56}{55}=\frac{11.56}{32.55}=\frac{7}{20}$

2) $\left(-\frac{5}{6}\right):\frac{15}{4}=\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{4}{15}=-\frac{20}{90}=-\frac{2}{9}$

Números decimales

Se llaman fracciones decimales a las que tienen como denominador el 1 seguido de ceros. Es decir una potencia de 10, o sea 10; 100; 1000; etc. Estas fracciones se expresan con otra notación que se llaman *números decimales*. Se escriben todas las cifras del numerador (número entero) y se apartan (por medio de una coma o un punto) de derecha a izquierda tantas cifras como ceros haya en el denominador (de ser necesario se agregan ceros a la izquierda de la primer cifra significativa).
Ejemplos:

$\frac{123}{10}=12,3$ $\qquad$ $\frac{123}{1000}=0,123$ $\qquad$ $\frac{123}{100000}=0,00123=0.00123$

A la inversa, si tenemos un número decimal y lo queremos expresar en forma de fracción, se coloca como numerador todas las cifras del número (enteras y decimales) prescindiendo de los ceros a la izquierda de la primera cifra significativa (diferente de cero), y como denominador el 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales haya.
Ejemplos:

$12,35=\frac{1235}{100}=\frac{247}{20}$ $\qquad$ $0,01235=\frac{1235}{100000}=\frac{247}{20000}$ $\qquad$ $0,15=\frac{15}{100}=\frac{3}{20}$

$1,25=\frac{125}{100}=\frac{5}{4}$ $\qquad$ $0,042=\frac{42}{1000}=\frac{21}{500}$ $\qquad$ $12,43=\frac{1243}{100}$

Observar que las fracciones con numerador mayor que el denominador son números mayores que 1, y menores que 1 si ocurre al revés.

También se puede comprobar que los números decimales con una cantidad finita de decimales, generan fracciones que tienen un denominador con factores primos únicamente 2 y 5 (son los factores del 10).
Podemos afirmar que *las fracciones que tienen como denominador producto de potencias de 2 y de 5 son iguales a números decimales con una cantidad finita de cifras decimales*
¿Qué ocurre con las fracciones que no tienen este tipo de denominador? Sabemos que todo racional puede ser expresado como un cociente entre dos enteros. De ahí proviene el nombre de "racional", por *ratio* o *razón*. Si aplicamos el algoritmo (conjunto de reglas para realizar una operación) de la división a estas fracciones, y dividimos el numerador por el denominador, obtenemos una cantidad infinita de cifras decimales, pero que se repiten desde una en adelante. Estos números decimales se los llama *decimales periódicos*.

$$\frac{5}{6} = 0,8333..... \qquad \frac{19}{7} = 2,714285714285.....$$

Quiere decir que toda fracción se puede expresar como un número decimal con una cantidad finita o infinita de cifras decimales. Para ello dividimos al numerador por el denominador.
Los racionales que tienen como denominador un entero que posee como *factores primos únicamente a 2 y 5* dan origen a números decimales con cantidad finita de cifras.
Si en el denominador hay otros factores primos diferentes de 2 y 5, son iguales a números decimales con infinitas cifras periódicas.
Ejemplos:

$$\frac{3}{4} = 0,75 \qquad \frac{17}{20} = 0,85$$

En los ejemplos anteriores las fracciones tiene como denominadores a $4 = 2^2$ y a $20 = 2^2.5$, cuyos factores primos son potencias de 2 y 5. La cantidad de cifras decimales es finita.

$$\frac{5}{6} = 0,8333..... \qquad \frac{19}{7} = 2,714285714285.....$$

Las anteriores tienen como denominadores a $6 = 2.3$ (contiene el factor 3) y a 7. Se puede ver que la cantidad de cifras decimales es infinita repitiéndose un bloque de ellas que es 3 y 714285 respectivamente. A este bloque lo denominamos *período*.
Llamamos a estos números *decimales periódicos*.
Se los divide en dos grupos: *periódicos puros* y *periódicos mixtos*. En este último caso, el grupo de cifras que aparece después de la coma por única vez forma el *no período*.
El decimal $0,8333.....$ tiene como período al 3 (el que se repite) y 8 como no período, es periódico mixto.
El decimal $2,714285714285.....$ tiene 2 como parte entera (a la izquierda de la coma), y $714285.....$ como período. No hay *no periodo*, por lo tanto es periódico puro.
Nos planteamos ahora la conversión de un número decimal periódico en una fracción.
Si es periódico puro la fracción equivalente se obtiene así: *se le suma a la parte entera del número decimal una fracción que tiene como numerador el período y como denominador tantas cifras 9 como cifras tenga el período.*
Ejemplos:

$$1,333.... = 1+\frac{3}{9} = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}; \quad 2,5454... = 2+\frac{54}{99} = 2+\frac{6}{11} = \frac{28}{11}; \quad 0,7575... = \frac{75}{99} = \frac{25}{33}$$

Si es periódico mixto se procede de esta forma: *a la parte entera se le suma una fracción cuyo numerador se obtiene escribiendo las cifras del no período y a continuación las del período, restándose luego el no período. El denominador se forma con tantos 9 como cifras hay en el período y a continuación tantos 0 como cifras tiene el no período.*

Ejemplos:

$$2,5444... = 2+\frac{54-5}{90} = 2+\frac{49}{90} = \frac{229}{90}; \qquad 1,01616... = 1+\frac{016-0}{990} = 1+\frac{8}{495} = \frac{503}{495}$$

Otra forma de obtener la fracción es *escribir en el numerador todas las cifras sin la coma y restarle el número formado con las cifras situadas a la izquierda del período (las que preceden al período). El denominador lleva tantos 9 como cifras hay en el período, si es periódico puro, y si es mixto se le agregan tantos ceros como cifras tiene el no período.*

$$1,333.... = \frac{13-1}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}; \qquad 2,5454... = \frac{254-2}{99} = \frac{252}{99} = \frac{28}{11}$$

$$2,5444... = \frac{254-25}{90} = \frac{229}{90}; \qquad 1,01616... = \frac{1016-10}{990} = \frac{1006}{990} = \frac{503}{495}$$

Con la notación decimal podemos decir que ***los números racionales tienen una parte entera y otra parte decimal. Si no hay parte decimal el número es entero. Si tiene parte decimal la misma tiene una cantidad finita de cifras o infinita pero periódicas.***

En el conjunto Q son siempre posibles las cuatro operaciones básicas, salvo la división por cero. Se llaman operaciones racionales a la *adición*, *sustracción*, *multiplicación* y *división*.

En las aplicaciones cotidianas de la Matemática es suficiente operar con los números racionales.

Aparte de las cuatro operaciones racionales se definen otras operaciones como la *potenciación* y *radicación*.

Potenciación de exponente natural

Cuando se tiene una multiplicación en la cual todos los factores son iguales, se abrevia con la notación $\mathbf{a^n}$, en la cual **a** es el factor que se repite y **n** la cantidad de veces que aparece. Al número **a** se lo llama *base*, al **n** *exponente*, al resultado *potencia* y a la operación *potenciación*. La base se toma como factor tantas veces como lo indica el exponente.

$$a^n = a.a.a.....a = p$$

Regla de signos para la potenciación: *cuando la base es positiva, el resultado es positivo. Cuando la base es negativa, se observa el exponente. Si es par la potencia es positiva y si es impar es negativa.*

Potenciación de exponente entero negativo: la definición anterior de potenciación con exponente natural, se generaliza para el caso de ser el exponente entero negativo, de la siguiente forma:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}}$$

Cuando el exponente es negativo se invierte la base y se le cambia el signo al exponente. Dicho de otra forma, es la inversa de la misma potencia pero con exponente positivo

Propiedades de la potenciación:

1) Distributivas

a) Con respecto a la multiplicación $(a.b)^n = a^n.b^n$

b) Con respecto a la división $(a:b)^n = a^n:b^n$

Tener en cuenta que la potenciación ***no es distributiva con respecto a la adición y la sustracción***

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n \qquad (a-b)^n \neq a^n - b^n$$

2) Potencias de igual base

a) Multiplicación $a^n.a^p = a^{n+p}$

Se deja la misma base y se suman los exponentes.

b) División $a^n : a^p = a^{n-p}$

Se deja la misma base y se restan los exponentes.

c) Potencia de otra potencia $(a^n)^p = a^{np}$

Se deja la misma base y se multiplican los exponentes

Definición de radicación:

La potenciación tiene dos operaciones inversas. En una de ellas se conoce el exponente y la potencia y se quiere calcular la base

$x^n = p$ el valor desconocido es "x"

Para escribir la incógnita "x" en un solo miembro de la igualdad (que quede despejada), se crea otra expresión simbólica

$x = \sqrt[n]{p}$ la cual se lee "raíz enésima de p"

Las expresiones anteriores son equivalentes, para lo cual escribimos.

$$x = \sqrt[n]{p} \Leftrightarrow x^n = p$$

Se llama raíz enésima de un número ***p*** *a otro número* ***x*** *tal que elevado a la* ***n*** *dé por resultado* ***p***.

En esta notación **n** se llama *índice*, **p** *radicando* y **x** *raíz*.

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{125} = 5 \ \ pues \ \ 5^3 = 125$$

$$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3} \ \ pues \ \ \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

$$\sqrt[5]{\left(-\frac{1}{32}\right)} = -\frac{1}{2} \ \ pues \ \ \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1^5}{2^5} = -\frac{1}{32}$$

¿Siempre es posible la operación de radicación con índice natural?
No, ***cuando el radicando es negativo y el índice es par, no existe un número que elevado a exponente par dé resultado negativo.***
Ejemplo:
No existe en Q $\sqrt[4]{-16}$ pues $(\pm 2)^4 = 16 \neq -16$

En el caso de existir la raíz, ¿el resultado es único?
Cuando *el índice es impar, el resultado es uno solo, teniendo el mismo signo que el radicando.* En el caso que *el índice es par y el radicando es positivo, hay dos resultados que son números opuestos.* Si hay más de una respuesta y trabajamos en problemas aritméticos, se toma el resultado positivo al cual se denomina *raíz aritmética.*

Propiedades de la radicación
1) Distributivas
a) con respecto a la multiplicación $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
b) con respecto a la división $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$ con $b \neq 0$

Observar que la radicación ***no es distributiva con respecto a la adición y la sustracción***

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{a-b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$$

2) Simplificación $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n:r]{a^{p:r}}$ siendo $\mathbf{r \neq 0}$ y divisor de **n** y **p**
Si se multiplica o divide el índice y el exponente del radicando por un mismo número, se obtiene otra raíz igual a la dada.
3) Raíz de otra raíz $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$
En el caso de una raíz de otra raíz, se deja el mismo radicando y se multiplican los índices.

Ejemplos:
1) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6:3]{2^{3:3}} = \sqrt{2}$
2) $\sqrt{\sqrt[3]{x^5}} = \sqrt[2.3]{x^5} = \sqrt[6]{x^5}$
3) $\sqrt[4]{225} = \sqrt[4]{3^2.5^2} = \sqrt[4]{3^2}.\sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4:2]{3^{2:2}}.\sqrt[4:2]{5^{2:2}} = \sqrt{3}.\sqrt{5} = \sqrt{3.5} = \sqrt{10}$
4) $\sqrt[3]{x}.\sqrt{x} = \sqrt[3.2]{x^{1.2}}.\sqrt[2.3]{x^{1.3}} = \sqrt[6]{x^2}.\sqrt[6]{x^3} = \sqrt[6]{x^2.x^3} = \sqrt[6]{x^5}$

Potenciación de exponente fraccionario

Esta operación se define en base a la operación de radicación y potenciación de exponente entero
En forma simbólica lo expresamos de la siguiente forma:

$$(a)^{\frac{n}{p}} = \sqrt[p]{a^n}$$

La potencia de exponente fraccionario puede escribirse como una raíz cuyo índice es el denominador del exponente, siendo el radicando la base de la potencia elevada al numerador del exponente.
La igualdad anterior permite transformar una raíz en una potencia y viceversa.

Así son válidas las igualdades $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} \qquad \left(-\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

Las propiedades de este tipo de potencia son las mismas que las de exponente entero.

Ejemplos:

1) $8^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8} = \sqrt{4.2} = \sqrt{4}.\sqrt{2} = 2.\sqrt{2}$

2) $x^{2/3}.x^{3/2} = x^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}} = x^{\frac{4+9}{6}} = x^{\frac{13}{6}} = \sqrt[6]{x^{13}} = \sqrt[6]{x^{12+1}} = \sqrt[6]{x^{12}}.\sqrt[6]{x} = x^2.\sqrt[6]{x}$

3) $\sqrt[3]{y^2}.\sqrt{y}.\sqrt[4]{y^3} = y^{2/3}.y^{1/2}.y^{3/4} = y^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} = y^{\frac{23}{12}}$

4) $$\frac{\sqrt{x}.x^{1/5}}{\sqrt{\sqrt{x}.x^2}} = \frac{x^{1/2}.x^{1/5}}{x^{1/4}.x^2} = \frac{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}}{x^{\frac{1}{4}+2}} = \frac{x^{\frac{7}{10}}}{x^{\frac{9}{4}}} = x^{\frac{7}{10}-\frac{9}{4}} = x^{-\frac{31}{20}} = \frac{1}{x^{\frac{31}{20}}} = \frac{1}{\sqrt[20]{x^{31}}}$$

Reales

En **Q** hay operaciones que no pueden realizarse en todos los casos. Por ejemplo muchas raíces (la gran mayoría) no dan como resultado un número racional. Por ejemplo $\sqrt{2};\sqrt{3};....;\sqrt{173};...\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{3};\sqrt[3]{4};.....;\sqrt[17]{45};...;\sqrt[564]{128};.....$
Podemos hallar números racionales que se aproximan cada vez más al resultado exacto de estos números, pero nunca calcular todas sus cifras pues las mismas no son periódicas. No se pueden predecir las que siguen a una ya calculada. Utilizando una calculadora se pueden comprobar las desigualdades que aproximan cada vez más a la $\sqrt{2}$

$1<\sqrt{2}<2$; $1,4<\sqrt{2}<1,5$, $1,41<\sqrt{2}<1,42$; $1,414<\sqrt{2}<1,415$; $1,4142<\sqrt{2}<1,4143$; $1,41421<\sqrt{2}<1,41422$; $1,414213<\sqrt{2}<1.414214$ etc.

Estos números que no se pueden expresar como un cociente entre dos enteros por tener infinitas cifras decimales que no son periódicas se llaman irracionales.
Se puede demostrar que existen más números irracionales que racionales. La operación de radicación genera muchos más números irracionales que racionales. Otros irracionales muy importantes son:

$\pi = 3,1415926535....$ $e = 2,71828182.....$

π es la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro; **e** es la base de los logaritmos naturales.
El conjunto que resulta de la unión de los racionales con los irracionales se llama *conjunto de los números reales* R.
Todo número real escrito en forma decimal tiene una cantidad finita o infinita de cifras decimales. *Si es finita o infinitas periódicas es racional y si son infinitas no periódicas es irracional.*
Con el agregado de los números irracionales se cubre totalmente el conjunto de puntos de un eje cartesiano. Por lo tanto existe una correspondencia biunívoca entre los puntos

de un eje y los números reales. A cada punto le corresponde un real y viceversa, a cada real un punto.

Complejos

Con el agregado de los irracionales **no** se resuelven todas las operaciones aritméticas en **R**. Quedan algunas sin solución como las raíces de índice par y radicando negativo, las potencias de base negativa y exponente irracional, los logaritmos de números negativos, entre otras. Esto motivó una nueva ampliación del campo numérico creándose los números complejos. En el conjunto **C** toda operación es posible, salvo la división por cero. La unidad imaginaria se puede expresar como $\sqrt{-1} = i$.
En la mayor parte de las aplicaciones de la Matemática a otras ciencias es más que suficiente operar con el conjunto de los reales R.

Ejercicios de aplicación

Ejercicio N° 1

Ordenar de menor a mayor los números $\frac{3}{5}; 0; 8; -6; \frac{4}{9}; \frac{8}{3}; -\frac{2}{7}$

Respuesta:

$$-6 < -\frac{2}{7} < 0 < \frac{4}{9} < \frac{3}{5} < \frac{8}{3} < 8$$

Ejercicio N° 2

Decir si las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas, justificando la respuesta
a) Entre dos enteros cualesquiera existen infinitos enteros.
b) Entre dos racionales diferentes existen infinitos racionales.
c) Nunca se podrá crear una máquina que calcule $\sqrt{2}$ con todas sus cifras.
d) La longitud de una circunferencia se calcula con la fórmula $\mathbf{L = 2\pi R}$ donde R representa la longitud del radio. Es imposible calcular la longitud de una circunferencia sin cometer error.
e) La suma de un número racional y otro irracional da por resultado un número racional.
f) El producto de números racionales a veces da un número racional.
g) En la vida cotidiana el hombre utiliza los números racionales.
h) Todo número racional se puede escribir como un cociente entre dos enteros.
i) Los números racionales tienen una cantidad finita de cifras decimales y si son infinitas son periódicas.
j) $\sqrt[17]{128}$ es racional.

Respuestas:
a) Falsa. Entre dos enteros hay una cantidad finita de enteros. Entre $a \in Z$ y $b \in Z$ siendo $a < b$ hay $b - a - 1$ enteros.

b) Verdadera. Siempre es posible hallar otro racional entre otros dos. Por ejemplo el promedio.

c) Verdadera. Pues $\sqrt{2}$ tiene infinitas cifras decimales y hay que calcular cada una pues no son periódicas. Es irracional. Se necesita un tiempo infinito.

d) Verdadera. Se comete error no solamente al medir el radio sino al utilizar π, pues solamente puede utilizarse una cantidad finita de cifras, lo que da un valor aproximado y no exacto del mismo.

e) Falsa. El irracional tiene infinitas cifras no periódicas, y al sumarlo al racional las cifras que resultan son infinitas y no periódicas.

f) Falso. El producto de racionales da siempre un racional, es una operación cerrada en Q.

g) Verdadera. Para las aplicaciones prácticas de la Matemática es suficiente trabajar con fracciones o aproximaciones decimales de los números que tienen infinitas cifras, periódicas o no.

h) Verdadero. El racional se expresa por definición como el cociente entre el numerador y el denominador, que son enteros.

i) Verdadero. Solamente los irracionales tienen infinitas cifras no periódicas.

j) Falso. La mayor parte de las raíces son irracionales y la dada lo es.

Ejercicio N° 3

De las expresiones simbólicas siguientes decir cuáles son verdaderas y cuáles no, justificando en cada caso la respuesta

a) $\sqrt{2} \in Q$ b) $0 \in N$ c) $0 \in Z$ d) $\pi \notin Q$ e) $\frac{1}{3} \in R$ f) $(1+\sqrt{2}) \notin Z^+$

g) $\sqrt[17]{43}$ es irracional h) $Z \subset R$ i) $\{1 ; \frac{1}{2} ; \sqrt[3]{3} ; \pi\} \subset R$ j) $\frac{1}{2} \in N_0$

k) $\{-2 ; 0 ; 17\} \not\subset N_0$ l) $\{\sqrt{-1} ; \frac{1}{2} ; 1 ; \frac{2}{7}\} \subset R$ m) $\sqrt[3]{\pi} \in R$

n) $\{\frac{3}{2} ; \frac{-2}{\sqrt{2}} ; 0 ; \frac{2}{5}\} \subset Q$ o) $\sqrt{\frac{144}{169}}$ es irracional p) $2{,}344444.... \notin Q$

q) $1{,}55555....$ es racional r) $\{x \in Z / x = \dot{2}\} \subset N$ s) $(\sqrt[3]{\pi} + 2) \in Q$

t) $(2 + 0{,}121212...) \in Q$

Respuestas:

a) Falsa. Se ha demostrado que la $\sqrt{2}$ es irracional. Luego no pertenece a Q.

b) Falso. El cero es un número entero pero no natural. Llevó mucho tiempo incorporarlo a la humanidad.

c) Verdadera. Por lo dicho anteriormente.

d) Verdadera. Es irracional y no pertenece a Q.

e) Verdadera. Los racionales son también reales. Son un subconjunto de R.

f) Verdadera. Pues $\sqrt{2}$ no es entero positivo (natural).

g) Verdadera. Es una raíz no calculable en Q.

h) Verdadera. Los enteros son racionales y también reales.

i) Verdadera. El primer conjunto está formado por números reales.

FRANJA MORADA Económicas Lomas

j) Falso. Es un número racional (fracción) pero no natural ni cero.
k) Verdadero. El -2 no es natural, pues es negativo.
l) Falso. Pues la raíz propuesta $\sqrt{-1}$ no se puede calcular en R. Es de índice par y radicando negativo.
m) Verdadera. Es una raíz de índice impar y siempre son calculables en R.
n) Falso. La fracción $-\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$ es irracional.
o) Falso. El racional 12/13 elevado al cuadrado da 144/169.
p) Falso. Es un número decimal periódico y se puede escribir como una fracción.
q) Verdadero. Equivale a una fracción pues es periódico.
r) Falso. El primer conjunto es el de los enteros múltiplos de 2, es decir pares. Como hay negativos no están incluidos en N.
s) Falso. La raíz cúbica de pi no es racional.
t) Verdadero. Se trata de dos racionales que se suman.

Ejercicio Nº 4

Hallar el resultado de las operaciones entre racionales (no utilizando calculadora) y comprobar el resultado utilizando una calculadora

a) $(-2)^3 : (5-11) + \sqrt[3]{-27}.(-1)^6 + (13-16)^2 =$

b) $\left(\frac{2}{3}\right):\left(-\frac{3}{2}+1\right)-\left(-\frac{16}{27}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{7}{8}\right)-\left(\frac{3}{4}\right)^{12}:\left(\frac{3}{4}\right)^{10} =$

c) $\sqrt[4]{\left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{2}{27}\right)}-\sqrt{\frac{8}{27}}\sqrt{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{2}\right)^0-\sqrt[3]{\frac{7}{8}-1} =$

d) $\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{4}{9}+\frac{1}{2}}-(-2)^{-2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(\frac{3}{4}-1\right) =$

e) $\left(\frac{2}{125}-\frac{2}{25}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}-125^{-\frac{1}{4}}.\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{4}} =$

Respuestas:

a) $\frac{22}{3}$ b) $-\frac{59}{48}$ c) $\frac{31}{18}$ d) $\frac{29}{68}$ e) $\frac{1}{15}$

Ejercicio Nº 5

Reducir las siguientes expresiones a una sola potencia

a) $\frac{x^3x^2}{x^4x^7} =$ b) $\sqrt[3]{x}\sqrt{x} =$ c) $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt{x}} =$

d) $\dfrac{y^{\frac{2}{3}}\sqrt{y}}{\sqrt[3]{y^4}\,y^{-2}} =$ e) $\left[\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]^6 =$ f) $\sqrt[3]{\sqrt{x}\,x^2} =$

Respuestas:

a) x^{-6} b) $x^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{x^5}$ c) $x^{-\frac{1}{10}} = \dfrac{1}{\sqrt[10]{x}}$

d) $y^{\frac{11}{6}} = y\sqrt[6]{y^5}$ e) x^4 f) $x^{\frac{13}{6}} = \sqrt[6]{x^{13}}$

Soluciones

Ejercicio Nº 4

4a)

$$(-2)^3 : (5-11) + \sqrt[3]{-27}.(-1)^6 + (13-16)^2 = (-8):(-6) + (-3).1 + (-3)^2 =$$

$$= (-8):(-6) + (-3) + 9 = \frac{4}{3} - 3 + 9 = \frac{4-9+27}{3} = \frac{22}{3}$$

4b)

$$\left(\frac{2}{3}\right):\left(-\frac{3}{2}+1\right) - \left(-\frac{16}{27}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{7}{8}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)^{12} : \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \left(\frac{2}{3}\right):\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{16}{27}\right)\left(\frac{2+7}{8}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)^{12-10} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)(-2) - \left(-\frac{16}{27}\right).\frac{9}{8} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{9}{16} = -\frac{2}{3} - \frac{9}{16} = \frac{-32-27}{48} = -\frac{59}{48}$$

4c)

$$\sqrt[4]{\left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{2}{27}\right)} - \sqrt{\frac{8}{27}}\sqrt{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{2}\right)^0 - \sqrt[3]{\frac{7}{8}-1} = \sqrt[4]{\frac{16}{81}} - \sqrt{\frac{8}{27}.\frac{2}{3}} + 1 - \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} =$$

$$= \frac{2}{3} - \sqrt{\frac{16}{81}} + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{12-8+18+9}{18} = \frac{31}{18}$$

4d)

$$\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{4}{9}+\frac{1}{2}} - (-2)^{-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(\frac{3}{4}-1\right) = \frac{\frac{4-3}{6}}{\frac{8+9}{18}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-2)\left(-\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}:\frac{17}{18} - \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{3}{17} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{12-17+34}{68} = \frac{29}{68}$$

4e)

$$\left(\frac{2}{125}-\frac{2}{25}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}-125^{-\frac{1}{4}}.\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{2-10}{125}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{3+1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{4}}.\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{4}}=$$

$$=\left(-\frac{8}{125}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{125}.\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[3]{-\frac{8}{125}}+\sqrt{\frac{4}{9}}-\left(\frac{1}{625}\right)^{\frac{1}{4}}=-\frac{2}{5}+\frac{2}{3}-\sqrt[4]{\frac{1}{625}}=$$

$$=-\frac{2}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=\frac{-6+10-3}{15}=\frac{1}{15}$$

Ejercicio Nº 5

5a)

$$\frac{x^3x^2}{x^4x^7}=\frac{x^{3+2}}{x^{4+7}}=\frac{x^5}{x^{11}}=x^{5-11}=x^{-6}=\frac{1}{x^6}$$

5b)

$$\sqrt[3]{x}\sqrt{x}=x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=x^{\frac{2+3}{6}}=x^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{x^5}$$

5c)

$$\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt{x}}=\frac{x^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{2}}}=x^{\frac{2}{5}-\frac{1}{2}}=x^{\frac{4-5}{10}}=x^{-\frac{1}{10}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{10}}}=\frac{1}{\sqrt[10]{x}}$$

5d)

$$\frac{y^{\frac{2}{3}}\sqrt{y}}{\sqrt[3]{y^4}\,y^{-2}}=\frac{y^{\frac{2}{3}}.y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{4}{3}}.y^{-2}}=y^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\left(\frac{4}{3}-2\right)}=y^{\frac{4+3-8+12}{6}}=y^{\frac{11}{6}}=\sqrt[6]{y^{11}}=\sqrt[6]{y^6.y^5}=\sqrt[6]{y^6}.\sqrt[6]{y^5}=y\sqrt[6]{y^5}$$

5e)

$$\left[\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]^6=x^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)6}=x^4$$

5f)

$$\sqrt[3]{\sqrt{x}}x^2=\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}}.x^2=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}.x^2=x^{\frac{1}{2}.\frac{1}{3}}.x^2=x^{\frac{1}{6}+2}=x^{\frac{13}{6}}=\sqrt[6]{x^{13}}=\sqrt[6]{x^{12}.x}=\sqrt[6]{x^{12}}\sqrt[6]{x}=x^2.\sqrt[6]{x}$$

FRANJA MORADA Económicas Lomas

Intervalos de números reales

Son subconjuntos de reales. Hay intervalos abiertos, cerrados, semiabiertos, de longitud finita o infinita.

1- ***Intervalo cerrado***:

Dados dos números reales **a** y **b** *con* **a < b** *se llama intervalo cerrado de extremos* **a** y **b** *al conjunto de reales comprendidos entre ambos e incluyendo a los mismos*

$$[a;b]=\{x\in R / a\le x\le b\}$$

Representado gráficamente se obtiene el segmento del eje de extremos **a** y **b** (incluyendo los extremos).

2- ***Intervalo abierto***:

Es el conjunto de los reales comprendidos entre otros dos sin incluir a los mismos

$$(a;b)=\{x\in R / a<x<b\}=]a;b[$$

Representado gráficamente se obtiene el conjunto de puntos interiores del segmento del eje de extremos **a** y **b** (excluyendo los extremos).

3-***Intervalos semiabiertos***:

Son subconjuntos de R en los cuales se incluye uno solo de los extremos. Según cual se excluye se llama abierto a derecha o izquierda.

abierto a derecha $[a;b)=\{x\in R / a\le x<b\}$

abierto a izquierda $(a;b]=\{x\in R / a<x\le b\}$

Todos los intervalos anteriores tienen por longitud igual a: **L = b − a** , con **a < b**, la cual es finita pues da un número real positivo.

4- ***Intervalos de longitud infinita***:

Son los subconjuntos de R que resultan de considerar los números mayores (o menores) que uno dado. Se presentan cuatro posibilidades que se representan en el eje por los puntos de una semirrecta que incluye o no, según sea cerrado o abierto, al origen de la misma.

$[a;+\infty)=\{x\in R / a\le x\}=\{x\in R / x\ge a\}$ $(a;+\infty)=\{x\in R / a<x\}=\{x\in R / x>a\}$

$(-\infty;a]=\{x\in R / x\le a\}=\{x\in R / a\ge x\}$ $(-\infty;a)=\{x\in R / a>x\}=\{x\in R / x<a\}$

Ejercicio Nº 6:

Hallar los resultados de las operaciones con intervalos y expresar el mismo como un intervalo. Representarlos en el eje real.
Aclaración: los símbolos $\cup$ y $\cap$ significan *unión* e *intersección* de conjuntos. En el primer caso se considera el conjunto formado por los elementos que están en uno, otro, o en los dos conjuntos.
En el segundo caso solamente se toman los que pertenecen simultáneamente a los dos conjuntos

a) $[-2\,;3] \cap [\,0\,;5]$ b) $(-\infty\,;0\,) \cup (-1\,;3]$ c) $(-\infty\,;3\,) \cap (2\,;+\infty\,)$
d) $[-4\,;3] \cup (\,3\,;5]$ e) $(-2\,;3] \cap [3\,;\,6{,}5)$ f) $(-4\,;3\,) \cap (\,4\,;5\,]$
g) $(-\infty\,;0\,) \cap (-\infty\,;2\,)$ h) $(-\infty\,;0\,) \cup (-\infty\,;3\,)$ i) $(-\infty\,;0\,] \cap (-2\,;\infty\,)$
j) $[-2\,;3] \cup [\,0\,;6]$ k) $\{\, x \in R\,/\; x < 2\,\} \cap \{\, x \in R\,/\; x \geq 1\,\}$

Respuestas:

a) $[0\,;3]$ b) $(-\infty\,;3\,]$ c) $(\,2;3\,)$ d) $[-4\,;5]$

e) $\{\;3\;\}$ f) $\varnothing$ vacío g) $(-\infty\,;0\,)$ h) $(-\infty\,;3\,)$

i) $(-2;0\,]$ j) $[\,-2;6\,]$ k) $[\,1\,;\,2)$

Ejercicio Nº 7:

Expresar como intervalos los siguientes conjuntos de reales

a) $\{\, x \in R\,/\,-1 < x < 2\,\}$ b) $\{\, x \in R\,/\,-2 \leq x < 4\,\}$ c) $\{\, x \in R\,/\;\; 0 < x \leq 6\,\}$
d) $\{\, x \in R\,/\,-1{,}5 \leq x \leq 2{,}8\,\}$ e) $\{\, x \in R\,/\;\; x \leq 10\,\}$ f) $\{\, x \in R\,/\;\; 0 \leq x\,\}$
g) $\{\, x \in R\,/\;\; x > 10\,\}$ h) $\{\, x \in R\,/\;\; x \geq 4\,\}$

Respuestas:

a) $(-1;2\,)$ b) $[\,-2\,;\,4)$ c) $(\,0;6\,]$ d) $[\,-1{,}5\,;2{,}8\,]$

e) $(-\infty\,;10\,]$ f) $[\,0\,;+\infty\,)$ g) $(10\,;+\infty\,)$ h) $[\,4\,;+\infty\,)$

FRANJA MORADA Económicas Lomas

Polinomios

Las ***expresiones algebraicas*** son entes matemáticos que se forman utilizando números y letras (llamadas variables o indeterminadas) los que se relacionan por medio de las operaciones de *suma*, *resta*, *multiplicación*, *división*, *potenciación* y *radicación*.
Entre las mismas están los monomios y los polinomios que constituyen las *expresiones algebraicas enteras*. Son las expresiones algebraicas más simples.

*Un **monomio** es la expresión algebraica en la cual la operación que vincula a las variables y los números es **únicamente la multiplicación**.*

Ejemplo: $(-2).x.y.x.z.\left(-\frac{5}{4}\right).z.y.x.x.\sqrt{2}$. Esta expresión se puede reducir aplicando las propiedades de la multiplicación. Para ello conmutamos los factores, asociamos los números y asociamos las variables iguales.

$$(-2).x.y.x.z.\left(-\frac{5}{4}\right).z.y.x.x.\sqrt{2} = (-2).\left(-\frac{5}{4}\right).\sqrt{2}.x.x.x.x.y.y.z.z = -\frac{5\sqrt{2}}{2}x^4y^2z^2$$

Podemos ver que en definitiva tenemos un número real al comienzo, multiplicado por variables que están elevadas a exponentes naturales, ya que los mismos indican las veces que dicha variable aparece como factor en el monomio.
Luego podemos decir que en un monomio se distinguen dos partes que se denominan *coeficiente* y *parte literal*.

El coeficiente es el número que multiplica a las variables y se escribe generalmente a la izquierda.

El coeficiente es un número real, pues operamos comúnmente con esa clase de números (pueden definirse polinomios en otros conjuntos numéricos).

La parte literal está formada por las letras que se multiplican y están elevadas a exponente natural (recordar que la potenciación de exponente natural es un caso particular de multiplicación).

Otros ejemplos de monomios ya reducidos son:

$$2x^3y \quad ; \quad -\frac{3}{4}x^2 \quad ; \quad \sqrt{2}x^3y^5 \quad ; \quad -6xyz$$

Se llama grado del monomio a la cantidad de factores literales que hay en el mismo. Se calcula sumando los exponentes, que son números naturales, de las variables.

$2x^3y^4$ tiene grado 7 ; $-\frac{5}{4}xyz$ tiene grado 3 ; $2x$ tiene grado 1

Los números se consideran monomios de grado cero, pues $-6 = (-6).x^0.y^0$ y la suma de los exponentes es cero.

*Un **polinomio** se puede definir como una suma de varios monomios.*

$2x^3+\frac{1}{2}x^2-5x+1$; $x^3y^2-\frac{3}{2}x^2y-5xy^2+x-5$ son polinomios de una y dos variables respectivamente.

Los polinomios se representan con una letra y entre paréntesis se ponen las variables del mismo: $P(x)$; $Q(x)$; $S(x;y)$

El grado de un polinomio es el mayor grado de los monomios que lo forman.

$P(x)=2x^3+\frac{1}{2}x^2-5x+1$ es de grado 3 ; $Q(x;y)=x^3y^2-\frac{3}{2}x^2y-5xy^2+x-5$ tiene grado 5

Un polinomio se llama homogéneo cuando todos los monomios son del mismo grado.

$P(x;y)=x^3y-\frac{3}{2}x^2y^2-5xy^3+3y^4$ es un cuatrinomio homogéneo, de grado 4 con dos variables

Si dos monomios tienen igual parte literal y diferente coeficiente se llaman semejantes.

Ejemplo: $2x^3y^4$; $-\frac{4}{3}x^3y^4$; $5y^4x^3$ son tres monomios semejantes.

Ejercicio N° 12:

Decir cuales de las siguientes expresiones son monomios o polinomios. Dar el grado de las que lo sean (no confundir *término* con *monomio)*.

a) $\frac{2}{3}x^3y$ b) $5x^3+\frac{1}{2}x^4-3x^2y^3$ c) $\frac{2xy}{z^3}$

d) $5x^{\frac{2}{3}}$ e) $-\frac{4}{5}$ f) $2x+\frac{5}{3}$

g) $5z+3zxy-3$ h) $\frac{1}{x}+3x^2$ i) $\sqrt{2}+3x^4-2x^2$

j) $\frac{2x+4}{3x-6}$ k) $\sqrt{3x+2}+6x$ l) $2x^{-2}+3x+5$

m) $\frac{7}{8}x^3-\frac{3}{4}xy+\pi^4$ n) $\sqrt{2}\pi^3ez^2$ o) $3x+2y^2-5z^3$

Respuestas:

a) monomio de grado 4 con dos variables
b) trinomio de grado 5 con dos variables
c) expresión algebraica fraccionaria con 3 variables (no es monomio ni polinomio)
d) expresión algebraica irracional de una variable (no es monomio ni polinomio)
e) monomio de grado cero (constante)
f) binomio de grado 1 con una variable
g) trinomio de grado 3 con tres variables
h) expresión algebraica fraccionaria con una variable (no es monomio ni polinomio)

FRANJA MORADA Económicas Lomas

i) trinomio de grado 4 con una variable
j) expresión algebraica fraccionaria con una variable (no es monomio ni polinomio)
k) expresión algebraica irracional con una variable (no es monomio ni polinomio)
l) expresión algebraica fraccionaria con una variable (no es monomio ni polinomio)
m) trinomio de grado 3 con dos variables
n) monomio de grado 2 con una variable (π y e son constantes, números irracionales)
o) trinomio de grado 3 con 3 variables

Operaciones con expresiones algebraicas enteras

Con las expresiones algebraicas enteras se realizan operaciones: suma, resta, multiplicación, división y potenciación de exponente natural

Suma de monomios

Para sumar monomios, si son semejantes, se suman los coeficientes y se deja la misma parte literal.

Equivale a sacar factor común a la parte literal. El resultado es un monomio semejante con los sumandos.

$$2x^3y^4 - \frac{4}{3}x^3y^4 + 5y^4x^3 = (2-\frac{4}{3}+5)x^3y^4 = \frac{17}{3}x^3y^4$$

Si se trata de monomios que no son todos semejantes, se asocian los semejantes y se suman, obteniendo como resultado un polinomio.

$$5x^2+(-\frac{1}{2}x^3)+\frac{3}{2}x^2+(-x^3)+2x^2=\left(5+\frac{3}{2}+2\right)x^2+\left(-\frac{1}{2}-1\right)x^3=\frac{17}{2}x^2-\frac{3}{2}x^3$$

Suma de polinomios

Para sumar polinomios se asocian los monomios que son semejantes y se suman como indicamos antes.

Ejemplo:

$$\left(\frac{1}{2}x^3+2xy-3y^2\right)+\left(y^2-\frac{1}{3}xy+x^2\right)=\frac{1}{2}x^3+\left(2-\frac{1}{3}\right)xy+(-3+1)y^2+x^2=$$

$$=\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{3}xy-2y^2+x^2$$

Resta de polinomios

Para restar polinomios se suma al primero (minuendo) el opuesto del segundo (sustraendo).

El opuesto de un polinomio es el que resulta de tomar los opuestos de los coeficientes (cambiar de signo a los coeficientes).

Ejemplo:

$$(5x^3-\frac{3}{2}x^2+2x)-(-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x^2-x^3+5)=5x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}x^2+x^3-5=$$

$$=(5+1)x^3+\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(2+\frac{2}{3}\right)x-5=6x^3-2x^2+\frac{8}{3}x-5$$

FRANJA MORADA Económicas Lomas

Multiplicación de monomios

Para multiplicar dos o más monomios se multiplican los coeficientes y las partes literales se asocian aplicando producto de potencias de igual base (los exponentes se suman).

El resultado es un monomio *cuyo grado es la suma de los grados de los monomios factores.*

Ejemplo:

$$\left(-\frac{3}{4}x^5y^2\right)\left(-2x^2y^3\right)\frac{5}{3}xy=\left(-\frac{3}{4}\right)(-2)\frac{5}{3}x^{5+2+1}y^{2+3+1}=\frac{5}{2}x^8y^6$$

Multiplicación de polinomios

La *multiplicación de polinomios* se realiza aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y a la resta. Por lo tanto

Se multiplica cada monomio de uno de los polinomios por cada monomio del otro polinomio.

El resultado parcial tiene una cantidad de monomios que es el producto de las cantidades de monomios que posee cada polinomio factor. Al asociar posteriormente los semejantes este número se reduce.

Si se multiplica un trinomio por un cuatrinomio, el resultado parcial es un polinomio con 3.4=12 monomios, que al asociar los que son semejantes se reduce.

El grado del resultado es la suma de los grados de los polinomios que se multiplican.

Ejemplo

$$(5x^3-\frac{3}{2}x^2+2x)(-x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x+5)=-5x^6+\frac{5}{2}x^5-\frac{10}{3}x^4+25x^3+\frac{3}{2}x^5-\frac{3}{4}x^4+x^3-\frac{15}{2}x^2+$$

$$-2x^4+x^3-\frac{4}{3}x^2+10x=-5x^6+4x^5-\frac{73}{12}x^4+27x^3-\frac{53}{6}x^2+10x$$

Los dos factores son polinomios de grado 3, y el resultado tiene grado 3+3=6.

Ejercicio N° 13

Realizar las operaciones entre los monomios y polinomios que se indican

a) $\frac{2}{3}x^3y+\frac{3}{2}x^3y+\left(-\frac{1}{4}x^3y\right)$

b) $2{,}5y^2x+1{,}25xy^2-3{,}5y^2x+y^2x$

c) $2x^3+3x+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3$

d) $(2x^3-\frac{1}{2}x^2-5x+1)+(-\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}x^3-0{,}5x^2+\frac{5}{4})$

e) $(-2{,}5x^3-2x^2+4x-3)-(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x^3-3x+\frac{7}{5})$

f) $\left(\frac{3}{4}x^3y^4z\right)\left(-\frac{28}{9}x^2yz^3\right)$

g) $\left(-\frac{5}{2}xy^2z^3\right)\left(-1{,}5yzp^3\right)$

h) $(-4xxyzt)\left(\frac{1}{2}x^3\right)\left(-\frac{8}{3}y^4t^2\right)$

i) $(2x^2-3x+4)(-x^2+4x-2)$

j) $(-\frac{1}{2}x^3+\frac{2}{3}x^2+4x-1)(4x-6)$

k) $(-2{,}5x^3-2x^2+4x-3)(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x^3-3x+\frac{7}{5})$

Respuestas:

a) $\frac{23}{12}x^3y$

b) $1{,}25xy^2=\frac{5}{4}xy^2$

c) $\frac{5}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{2}$

d) $\frac{8}{3}x^3-x^2-\frac{13}{2}x+\frac{9}{4}$

e) $-4x^3-\frac{5}{2}x^2+7x-\frac{22}{5}$

f) $-\frac{7}{3}x^5y^5z^4$

g) $\frac{15}{4}xy^3z^4p^3$

h) $\frac{16}{3}x^5y^5zt^3$

i) $-2x^4+11x^3-20x^2+22x-8$

j) $-2x^4+\frac{17}{3}x^3+12x^2-28x+6$

k) $-\frac{15}{4}x^6-\frac{17}{4}x^5+\frac{25}{2}x^4-\frac{163}{10}x^2+\frac{73}{5}x-\frac{21}{5}$

División de polinomios

Sean dos polinomios que llamamos P(x) y Q(x) de una variable, teniendo el primero grado *igual o mayor* al del segundo. Al P(x) se lo denomina *dividendo* y a Q(x) *divisor*. En este caso se puede realizar la división de los polinomios, lo cual consiste en hallar otros dos polinomios C(x) y R(x) que se llaman *cociente* y *resto* respectivamente. Los mismos deben cumplir las dos condiciones siguientes:

- *El grado de R(x) debe ser menor al del divisor Q(x)*
- *El producto del cociente por el divisor, más el resto debe dar el dividendo, es decir* $C(x).Q(x)+R(x)=P(x)$

Dividiendo los dos miembros de la igualdad anterior por el divisor Q(x) resulta:

$$\frac{C(x).Q(x)}{Q(x)}+\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{Q(x)}\Rightarrow\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

Esto se expresa coloquialmente diciendo que *toda división se puede expresar como el cociente más la fracción entre el resto y el divisor.*

El conjunto de pasos que se aplica para obtener el cociente y el resto de una división se llama *algoritmo de la división.*

Ambos polinomios se ordenan en forma decreciente teniendo en cuenta los exponentes de las potencias de la variable, y se completan las que faltan con coeficiente cero. Este proceso se denomina *completar* y *ordenar* los polinomios.

A continuación se dividen los monomios de mayor grado de dividendo y divisor, para lo cual se dividen los coeficientes y se restan los exponentes de la variable. El resultado así obtenido se multiplica por el divisor, lo colocamos ordenadamente debajo del dividendo para restarlo del mismo. Por tal motivo al sustraendo le cambiamos los signos y se transforma en una suma.

El polinomio así obtenido es de grado menor al del dividendo pues el monomio de mayor grado se elimina. Se llama *primer resto parcial*.

Tomando a este último como un nuevo dividendo se repite la operación antes realizada.

En Matemática los procesos que se repiten para calcular u obtener algo se llaman *iterativos*. Cuando se llega a un resto parcial de grado menor al del divisor, se detiene el proceso.

Veamos un ejemplo: calculemos la división entre

$P(x) = 4x^5 - 5x - 3x^3 + 1$ y $Q(x) = 2x^3 + x - 4x^2 - 2$

Los completamos y ordenamos en forma decreciente disponiéndolos uno al lado del otro como sigue

$P(x) = 4x^5 + 0x^4 - 3x^3 + 0x^2 - 5x + 1$ $\quad$ $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 2$

Los disponemos para efectuar el algoritmo de la división en sucesivos pasos

$$\begin{array}{rl} 4x^5 + 0x^4 - 3x^3 + 0x^2 - 5x + 1 & \big| \; 2x^3 - 4x^2 + x - 2 \\ \hline -4x^5 + 8x^4 - 2x^3 + 4x^2 & \quad 2x^2 + 4x + 11/2 \\ \hline 8x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 1 & \\ -8x^4 + 16x^3 - 4x^2 + 8x & \\ \hline 11x^3 + 0x^2 + 3x + 1 & \\ -11x^3 + 22x^2 - 11/2\, x + 11 & \\ \hline 22x^2 - 5/2\, x + 12 & \end{array}$$

El cociente es $C(x) = 2x^2 + 4x + \frac{11}{2}$ y el resto $R(x) = 22x^2 - \frac{5}{2}x + 12$

Como verificación calcular C(x).Q(x) y luego sumar a este resultado R(x), debiendo dar como resultado final P(x).

Se puede operar con los coeficientes de los polinomios separadamente y no escribir las potencias de la variable (*método de los coeficientes separados*) con lo cual se simplifica la escritura y se gana tiempo. El ejemplo anterior queda de esta forma

4	0	–3	0	–5	1	2	–4	1	–2
–4	8	–2	4			2	4	$11/2$	
	8	–5	4	–5	1				
	–8	16	–4	8					
		11	0	3	1				
		–11	22	$-11/2$	11				
			22	$-\frac{5}{2}$	12				

El cociente es $C(x) = 2x^2 + 4x + \frac{11}{2}$ y el resto $R(x) = 22x^2 - \frac{5}{2}x + 12$

Ejercicio N°14

De cada una de las divisiones entre polinomios calcular el cociente y el resto, verificando los resultados.

a) $(3x^3 + 2x^2 - 4x + 5) : (x + 2)$ b) $(x^4 + 4x^2 + 5) : (x^2 + x + 2)$

c) $(x^5 + 2x^4 - 4x^3 + x^2 + 2) : (x^3 + 2x - 1)$ d) $(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) : (x^2 - 2x + 1)$

Respuestas:

a) $C(x) = 3x^2 - 4x + 4$ $R(x) = -3$

b) $C(x) = x^2 - x + 3$ $R(x) = -x - 1$

c) $C(x) = x^2 + 2x - 6$ $R(x) = -2x^2 + 14x - 4$

d) $C(x) = x^2 - 2x + 1$ $R(x) = 0$

Regla de Ruffini

Es una forma abreviada de calcular la división de un polinomio de una variable P(x), ordenado y completo, por un binomio de la forma (x + a), es decir la variable más un número positivo o negativo.

Se opera separadamente con los coeficientes, disponiendo los del polinomio dividendo P(x) en una línea horizontal, comenzando por el de mayor grado y terminando en el independiente. En el extremo izquierdo del segundo renglón se coloca el valor que anula al divisor (x + a), es decir el número **a** cambiado de signo. En la tercera fila se comienza con el primer coeficiente de P(x), dispuesto en la misma columna que el primero de la

primera fila. Cada elemento de la última fila se multiplica por el valor (–a) del extremo izquierdo de la segunda, y el resultado se coloca en la columna siguiente de la segunda. Se suman los valores situados uno debajo del otro de la primera y segunda fila, y su suma se sitúa en la tercera fila. Este proceso se repite hasta el final.
Los números dispuestos en la última fila son los coeficientes del cociente que tiene grado menor en 1(uno) al del dividendo, salvo el último que es el resto de la división.
Si éste es cero la división es exacta.

$$(a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n) : (x + a)$$

	a_0	a_1	a_2	.....	a_{n-1}	a_n
$-a$		$a_0(-a)$	$c_1(-a)$	.....	$c_{n-2}(-a)$	$c_{n-1}(-a)$
	a_0	c_1	c_2	.....	c_{n-1}	c_n

Siendo: $c_1 = a_1 + a_0(-a)$; $c_2 = a_2 + c_1(-a)$; ..... $c_n = a_n + c_{n-1}(-a)$

cociente $C(x) = a_0x^{n-1} + c_1x^{n-2} + c_2x^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + c_{n-2}x + c_{n-1}$

resto $R(x) = c_n$

Veamos un ejemplo numérico. Hagamos la división $(3x^5 + 2x - x^3 + 4) : (x + 2)$

Completando y ordenando $(3x^5 + 0x^4 - x^3 + 0x^2 + 2x + 4) : (x + 2)$

	3	0	–1	0	2	4
–2		–6	12	–22	44	–92
	3	–6	11	–22	46	–88

cociente $C(x) = 3x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 22x + 46$

resto $R(x) = -88$

Ejercicio Nº15

Aplicando la regla de Ruffini calcular cociente y resto de las divisiones

a) $(-2x^3 + x^4 - x^2 + 12) : (x + 1)$

b) $(\frac{1}{2}x^3 - 2x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x) : (x - 1)$

c) $(x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 1) : (x + \frac{1}{2})$

d) $(x^5 + 3x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 2x + \frac{2}{3} - 6x^3) : (x - 1)$

e) $(x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16) : (x + 2)$

FRANJA MORADA Económicas Lomas

Respuestas:

a) $C(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ $\qquad R(x) = 14$

b) $C(x) = -2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$ $\qquad R(x) = 1$

c) $C(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{15}{8}$ $\qquad R(x) = -\frac{31}{16}$

d) $C(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{2}{3}$ $\qquad R(x) = 0$

e) $C(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ $\qquad R(x) = 0$

Ceros de un polinomio de una variable

Dado un polinomio de una variable $P(x)$, la misma puede ser sustituida por un número real $x = a$. Lo escribimos poniendo $P(a)$. Operando se llega a un resultado que se llama *valor numérico de* $P(x)$ *para* $x = a$.
Ejemplo:
Calcular el valor numérico de $P(x) = 3x^3 + 2x + 5$ para $x = 2$. Reemplazamos en el polinomio la x por el número 2. Resulta: $P(2) = 3.2^3 + 2.2 + 5 = 24 + 4 + 5 = 33$.
Pude que el valor numérico obtenido sea cero. En ese caso el número reemplazado se llama *cero* o *raíz del polinomio*.

Se llama cero de un polinomio a todo número que sustituido en lugar de la variable hace que el polinomio tome el valor numérico cero

Los ceros o raíces del polinomio son números muy importantes en la resolución de ecuaciones y en la factorización de los polinomios.
Se demuestra que la cantidad de ceros de un polinomio coincide con el grado del mismo cuando operamos con los números complejos. Siendo los reales un subconjunto de los complejos, operando con los reales la cantidad de ceros puede ser menor que el grado del polinomio. Para polinomios con coeficientes reales, la cantidad de ceros reales es igual al grado restándole un número par. Si el grado es cinco, el número de ceros reales es 5, 3 ó 1. Si el grado es dos, los ceros reales son 2 ó ninguno.
Si al dividir $P(x)$ por $x - a$ el resto da cero, y el cociente es $C(x)$, podemos escribir al polinomio dado como el producto del divisor por el cociente, es decir $P(x) = (x - a).C(x)$. Si en esta igualdad le asignamos a la variable **x** el valor **a** queda

$$P(a) = (a - a).C(a) = 0.C(a) = 0$$

Luego **a** es un cero del polinomio y la división por $(x - a)$ es exacta. Resulta así que:

*El número **a** es un cero de un polinomio, si y sólo si, la división del mismo por **x –a** es exacta*

Ejercicio N°16

Comprobar si los números dados en cada caso son ceros del polinomio utilizando la regla de Ruffini

a) $x^3 - 4x^2 + x + 6$ si $x = 2$, $x = 3$, $x = -1$
b) $x^4 - 5x^2 + 4$ si $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$, $x = -2$
c) $x^3 + 5x^2 - 2x - 6$ si $x = -1$, $x = 2$, $x = 3$

Respuestas

a) $x = 2$ es cero; $x = 3$ es cero; $x = -1$ es cero

b) $x = 1$ es cero; $x = -1$ es cero; $x = 2$ es cero; $x = -2$ es cero

c) $x = -1$ es cero; $x = 2$ no es cero; $x = 3$ no es cero

FRANJA MORADA Económicas Lomas

Factorización de polinomios

Un polinomio con coeficientes reales se llama primo en **R** cuando el único polinomio con coeficientes reales que lo divide exactamente es el mismo. En caso contrario el polinomio se puede *factorizar*, lo cual consiste en descomponerlo en producto de polinomios primos.

La factorización de polinomios de una variable esta relacionada con el conocimiento de los ceros de los mismos. Por lo visto anteriormente, si x_1 es un cero de $P(x)$ la división de $P(x)$ por el binomio de grado uno $(x-x_1)$ es exacta. Llamando $Q(x)$ al cociente podemos poner: $P(x)=(x-x_1)Q(x)$

Si x_2 es un cero de $Q(x)$ (que también lo es de $P(x)$), dividimos a $Q(x)$ por $(x-x_2)$ dando resto cero y como cociente otro polinomio $S(x)$. Luego $Q(x)=(x-x_2)S(x)$. Reemplazando resulta $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)S(x)$.

Este proceso se puede continuar utilizando todos los ceros reales de $P(x)$, que a lo sumo son tantos como el grado del polinomio. Por lo tanto:

Un polinomio se puede expresar como el producto de los binomios de grado uno, que son las diferencias entre x y las raíces o ceros del mismo, por el coeficiente del monomio de mayor grado

$$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).....(x-x_n)$$

En la igualdad anterior **a** es el coeficiente de x^n y **n** el grado de $P(x)$.

Para determinar los *ceros racionales* de un polinomio con *coeficientes enteros* se puede aplicar el teorema de Gauss.

- *Si el coeficiente de la mayor potencia de x es 1 (uno), las raíces enteras del polinomio son divisores del término independiente (el que no tiene x).*
- *Si el coeficiente de x^n no es 1, las raíces racionales (enteras y fraccionarias) tienen como numerador un divisor del término independiente y como denominador un divisor del coeficiente del de mayor grado*

De esta forma se prueba por medio de la regla de Ruffini cuales de los divisores son ceros del polinomio. Cuando se llega a un cociente de grado dos, los ceros del mismo se determinan por medio de la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejemplos:

a) Factorizar el trinomio $P(x)=2x^2+3x-5$

Como es de grado dos determinamos los ceros aplicando la fórmula anterior

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.2.(-5)}}{2.2} = \frac{-3 \pm 7}{4} \Rightarrow x_1 = 1 \ \wedge \ x_2 = -\frac{5}{2}$$

Por lo tanto la factorización es $\boxed{P(x) = 2x^2 + 3x - 5 = 2(x-1)(x+\frac{5}{2})}$

b) Factorizar el polinomio $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Es de grado 3, por lo tanto no podemos aplicar la fórmula de resolución de las ecuaciones de grado dos. Debemos encontrar algún cero para reducir el grado del polinomio. Los coeficientes son enteros y el de mayor grado es 1. Podemos aplicar teorema de Gauss en su primera versión.
Las posibles raíces enteras del polinomio son divisores del término independiente, o sea de 6.
Los divisores de 6 son: $\{ \pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \pm 6 \}$.
Aplicando la regla de Ruffini probamos si 1 es un cero, para lo cual dividimos al polinomio por $(x-1)$

	1	−2	−5	6
1		1	−1	−6
	1	−1	−6	0 = resto

Como el resto da cero, el 1 es una raíz del polinomio.
El cociente es de segundo grado $C(x) = x^2 - x - 6$ del cual se obtienen las otras dos raíces aplicando la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-6)}}{2.1} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow x_2 = 3 \ \wedge \ x_3 = -2$$

$$\boxed{Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x-3)(x+2)}$$

c) Factorizar el polinomio $S(x) = 2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4$

Como en el ejemplo anterior, al tener coeficientes enteros, aplicamos el teorema de Gauss. El coeficiente del monomio de mayor grado es 2, con lo cual puede haber ceros que son fracciones.
El numerador de las mismas es un divisor del término independiente que es 4.
El denominador un divisor del coeficiente del término de mayor grado, es decir de 2

$$\text{posibles numeradores} \Rightarrow \text{divisores de } 4 = \{\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 4\}$$
$$\text{posibles denominadores} \Rightarrow \text{divisores de } 2 = \{\pm 1 ; \pm 2\}$$

Formamos todas las combinaciones posibles obteniendo:

$$\text{posibles ceros racionales} = \left\{ \pm 1 \; ; \; \pm 2 \; ; \; \pm 4 \; ; \; \pm \frac{1}{2} \right\}$$

Vamos probando por medio de la regla de Ruffini que divisiones dan resto cero

	2	1	−9	−4	4
1		2	3	−6	−10
	2	3	−6	−10	**−6 ≠ 0**
−1		−2	1	8	−4
	2	−1	−8	4	**0**
2		4	6	−4	
	2	3	−2	**0**	

Cuando probamos con 1 el resto no dio cero. Luego 1 no es raíz del polinomio.
Con (-1) y con 2 los restos resultaron cero. Luego estos dos números son raíces del polinomio. De los cuatro ceros que puede tener el polinomio, conocemos dos. El cociente al cual llegamos es de grado dos, $C(x) = 2x^2 + 3x - 2$, lo que nos permite calcular los dos ceros restantes aplicando la fórmula resolvente vista anteriormente.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.2.(-2)}}{2.2} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2} \wedge x_4 = -2$$

Los ceros del polinomio son $\left\{ -1 \; ; \; 2 \; ; \; \frac{1}{2} \; ; \; -2 \right\}$ y el polinomio factorizado es

$$\boxed{S(x) = 2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4 = 2(x+1)(x-2)(x-\frac{1}{2})(x+2)}$$

Ejercicio N°17

Factorizar los polinomios calculando previamente los ceros de los mismos

a) $3x^2 - 2x - 8$ b) $-x^2 + 5x - 6$ c) $2x^2 - 11x + 5$ d) $4x^2 - 12x + 9$

e) $3x^3 - x^2 - 3x + 1$ f) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$ g) $x^4 - 13x^2 + 36$

Respuestas:

a) $P(x) = 3x^2 - 2x - 8 = 3(x-2)\left(x + \frac{4}{3}\right) = (x-2)(3x+4)$

b) $P(x) = -x^2 + 5x - 6 = -(x-2)(x-3)$

c) $P(x)=2x^2-11x+5=2\left(x-5\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=\left(x-5\right)\left(2x-1\right)$

d) $P(x)=4x^2-12x+9=4\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=\left(2x-3\right)\left(2x-3\right)=\left(2x-3\right)^2$

e) $P(x)=3x^3-x^2-3x+1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-1\right)\left(x+1\right)=\left(3x-1\right)\left(x-1\right)\left(x+1\right)$

f) $P(x)=x^4+2x^3-13x^2-14x+24=\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(x-3\right)\left(x+4\right)$

g) $P(x)=x^4-13x^2+36=\left(x-2\right)\left(x+2\right)\left(x-3\right)\left(x+3\right)$

Factor común

A veces los polinomios se factorizan sin conocer las ceros de los mismos.
Un caso, el más simple, es el de sacar un factor común en todos los monomios. En cada uno de los monomios hay multiplicaciones y por consiguiente *factores*.

Si en ***todos*** los monomios hay un factor repetido se lo denomina *factor común*.

Se coloca adelante, multiplicado por el polinomio que resulta de dividir a cada monomio del polinomio dado por el factor común sacado.
Estas divisiones deben dar monomios, para lo cual el coeficiente del factor común puede ser cualquier número real diferente de cero, y la parte literal consta de las letras que aparecen en todos los monomios, elevadas al exponente menor a los que están elevadas en el polinomio.
Este proceso equivale a aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, pero en sentido inverso.

$$x(a+b-c)=xa+xb-xc \quad \text{sentido directo}$$
$$xa+xb-xc=x(a+b-c) \quad \text{sentido inverso}$$

Ejemplos:

a) Sacar factor común en el polinomio $6x^3-9x^4+12x^5$
Factor común numérico puede ser cualquier real que no sea cero. Si queremos que den *únicamente enteros* es el 3.
La "x" aparece en todos los monomios, luego es factor común, y el exponente menor al que aparece es 3. Por consiguiente el factor común es $3x^3$. Hay que *dividir* a cada monomio por el factor común extraído, dando.

$$6x^3-9x^4+12x^5=3x^3(2-3x+4x^2)$$

Si no imponemos que los coeficientes sean enteros, podemos sacar factor común, por ejemplo a $6x^3$, resultando

$$6x^3-9x^4+12x^5=6x^3(1-\frac{3}{2}x+2x^2)$$

Tener presente que *ningún monomio del segundo polinomio puede ser cero. Lo más simple que queda es "1".*

b) Sacar factor común en el polinomio $4x^3y^2-12x^4y^3+3x^2y^2$.

Se trata de un polinomio con dos variables. Como parte literal podemos sacar a x^2y^2, y de coeficiente el número que consideramos conveniente, por ejemplo 4

$$4x^3y^2 - 12x^4y^3 + 3x^2y^2 = 4x^2y^2\left(x - 3x^2y + \frac{3}{4}\right)$$

Cuando se quiere *verificar* el resultado, se aplica la propiedad distributiva en el segundo miembro y debe dar el del primero.

Ejercicio N°18

Sacar factor común en los polinomios

a) $24x^8 - 32x^4 + 48x^6$

b) $\frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{7}{8}x^2$ de forma tal que sean enteros los coeficientes del nuevo polinomio

c) $4x^3 - 12x^6 + 3x^4$ de forma tal que el coeficiente de mayor grado sea "1".

d) $20x^3y^2z^5 - 75x^4yz^6 + 90x^2z^9$

e) $4(x+2)^3 - 2x(x+2)^5$

Respuestas:

a) $24x^8 - 32x^4 + 48x^6 = 8x^4\left(3x^4 + 6x^2 - 4\right)$

b) $\frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{7}{8}x^2 = \frac{1}{8}x^2\left(12x - 10x^2 + 7\right)$

c) $4x^3 - 12x^6 + 3x^4 = -12x^3\left(x^3 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}\right)$

d) $20x^3y^2z^5 - 75x^4yz^6 + 90x^2z^9 = 5x^2z^5\left(4xy^2 - 15x^2yz + 18z^4\right)$

e) $4(x+2)^3 - 2x(x+2)^5 = 2\left(x+2\right)^3\left(-x^3 - 4x^2 - 4x + 2\right)$

Cuadrado de un binomio

Recordemos que la potenciación no es distributiva con respecto a la adición y sustracción. Por lo tanto si debemos calcular el cuadrado de un polinomio $P(x)$ debemos multiplicarlo por si mismo, es decir $P(x).P(x)$. Si hay que elevarlo al cubo se realiza $P(x).P(x).P(x)$, y así sucesivamente. Para el cuadrado de un binomio hay una fórmula que permite escribir directamente el resultado, y se obtiene así:

$$\boxed{(x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 + xa + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2}$$

El resultado final es la suma de los dos cuadrados de cada monomio, más el doble del producto de los mismos.
Todos recuerdan la frase

El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Tener en cuenta que los cuadrados son siempre positivos y que el doble producto es positivo o negativo, si los monomios son de signos iguales o diferentes, respectivamente.

Ejemplos: desarrollar el cuadrado de los binomios

a) $\left(\frac{1}{2}x^3+4xy\right)^2=\left(\frac{1}{2}x^3\right)^2+(4xy)^2+2.\left(\frac{1}{2}x^3\right).(4xy)=\frac{1}{4}x^6+16x^2y^2+4x^4y$

b) $\left(4x^3-\frac{1}{4}\right)^2=\left(4x^3\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2+2.4x^3.\left(-\frac{1}{4}\right)=16x^6+\frac{1}{16}-2x^3$

La fórmula del cuadrado de un binomio es válida cuando se trata de la suma de dos término en general.

Ejercicio N°19

Desarrollar los cuadrados de las sumas o restas (observar que no todos son binomios)

a) $\left(2x^2-3\right)^2$ b) $\left(\frac{3}{5}x^2-\frac{5}{3}y^3\right)^2$ c) $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^2$ d) $\left(2x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{3}}\right)^2$

Respuestas:

a) $\left(2x^2-3\right)^2=4x^4-12x^2+9$

b) $\left(\frac{3}{5}x^2-\frac{5}{3}y^3\right)^2=\frac{9}{25}x^4+\frac{25}{9}y^6-2x^2y^3$

c) $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^2=4x^4+\frac{9}{x^2}-12x$

d) $\left(2x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{3}}\right)^2=4x^3+9x^{\frac{2}{3}}-12x^{\frac{11}{6}}$

Trinomio cuadrado perfecto

Cuando tenemos un trinomio o, para ser más general, una suma algebraica de tres términos, puede que provenga del desarrollo del cuadrado de una suma o resta de dos términos. Operando con polinomios, a los trinomios de este tipo se los llama *trinomios cuadrados perfectos*.
Para que se verifique esto, de los tres monomios dos de ellos se deben poder escribir como el cuadrado de otro monomio.

Esto es posible si tienen coeficiente positivo y además los exponentes de las letras son número pares.
Además el restante monomio debe ser el doble del producto de las bases de los cuadrados. El signo del doble producto determina si se trata del cuadrado de una suma o de una resta.

Verificado todo esto, el trinomio se escribe como el cuadrado de un binomio y queda así factorizado.

Tener en cuenta que todo número positivo es el cuadrado de otro, que se obtiene sacando la raíz cuadrada. Así resulta que $16 = 4^2$, $5 = \left(\sqrt{5}\right)^2$, $\frac{7}{4} = \left(\sqrt{\frac{7}{4}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$

Ejemplos:

Factorizar, de ser posible, como trinomio cuadrado perfecto

a) $4x^6 + 25 + 20x^3$. Es un trinomio pues tiene tres monomios. El tercero no es un cuadrado pues el exponente de la "x" es impar. El primero es el cuadrado de $2x^3$ y el segundo el de 5. Haciendo el doble producto $2.2x^3.5 = 20x^3$ se observa que coincide con el tercero. Luego el trinomio se puede escribir

$$4x^6 + 25 + 20x^3 = \left(2x^3 + 5\right)^2$$

b) $9x^4 + 4 - 12x^2$

En este caso los dos primeros monomios son cuadrados de $3x^2$ y de 2. El doble de su producto es $2.3x^2.2 = 12x^2$
Que coincide con el otro monomio, y como es negativo se trata de una diferencia elevada al cuadrado. Así puede ponerse

$$9x^4 + 4 - 12x^2 = \left(3x^2 - 2\right)^2 = \left(2 - 3x^2\right)^2$$

Ejercicio N°20

Analizar si los trinomios son cuadrados perfectos y factorizarlos, de ser posible

a) $4 + 25y^2 + 20y$ b) $49x^6 - 14x^3 + 1$ c) $\frac{4}{9}x^2 - 4x - 9$ d) $4x^4 + 9 + 6x^2$

e) $20x^3 - 4x^6 - 25$ f) $(4x+1)^2 + 25 + 10(4x+1)$ g) $16x^2 + 25y^6 + 40x^2y^3$

Respuestas:

a) $4 + 25y^2 + 20y = \left(2 + 5y\right)^2$

b) $49x^6 - 14x^3 + 1 = \left(7x^3 - 1\right)^2 = \left(1 - 7x^3\right)^2$

c) $\frac{4}{9}x^2 - 4x - 9$ no es trinomio cuadrado perfecto pues el 9 que tendría que ser el cuadrado del segundo es *negativo* (los dos cuadrados deben ser positivos)

d) $4x^4 + 9 + 6x^2$ no es trinomio cuadrado perfecto pues el doble del producto de las bases es $2.2x^2.3 = 12x^2 \neq 6x^2$.

e) $20x^3 - 4x^6 - 25 = -\left(4x^6 - 20x^3 + 25\right) = -\left(2x^3 - 5\right)^2 = -\left(5 - 2x^3\right)^2$

f) $(4x+1)^2 + 25 + 10(4x+1) = \left(4x + 1 + 5\right)^2 = \left(4x + 6\right)^2$

g) $16x^2 + 25y^6 + 40x^2y^3$ no es trinomio cuadrado perfecto pues el doble producto de las bases no concuerda con el tercer monomio.

Diferencia de cuadrados

Veamos que se obtiene al multiplicar una suma por la diferencia de los mismos términos.

$$(x+a)(x-a)=x^2-xa+ax-a^2=x^2-a^2$$

El resultado es la diferencia de los cuadrados. Si procedemos en sentido inverso, podemos decir que:

Toda diferencia de cuadrados puede expresarse como la suma de las bases por la diferencia de las mismas.

Esto permite factorizar directamente a las diferencias de cuadrados de dos términos. Tener presente lo anteriormente dicho para saber si un monomio es o no cuadrado de otro monomio.

Ejemplos:

Factorizar, de ser posible, las diferencias:

a) $4x^6-25=\left(2x^3\right)^2-5^2=\left(2x^3+5\right)\left(2x^3-5\right)$ la última diferencia no es de cuadrados pues el exponente de la "x" no es par.

b) $4x^4-9=\left(2x^2\right)^2-3^2=\left(2x^2+3\right)\left(2x^2-3\right)$ esta última diferencia es de cuadrados pues el exponente de la "x" es par, y todo número positivo se puede expresar como un cuadrado

$2x^2-3=\left(\sqrt{2}x\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{2}x+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}x-\sqrt{3}\right)$ y sustituyendo en la igualdad anterior

$$4x^4-9=\left(2x^2\right)^2-3^2=\left(2x^2+3\right)\left(\sqrt{2}x+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}x-\sqrt{3}\right)$$

Ejercicio N°21

Empleando diferencias de cuadrados factorizar las diferencias

a) x^4-16 b) $100x^2-1$ c) $\frac{1}{81}x^4-625$ d) x^2y^4-49 e) x^8-1

Respuestas:

a) $x^4-16=\left(x^2+4\right)(x+2)(x-2)$

b) $100x^2-1=(10x+1)(10x-1)$

c) $\frac{1}{81}x^4-625=\left(\frac{1}{9}x^2+25\right)\left(\frac{1}{3}x+5\right)\left(\frac{1}{3}x-5\right)$

d) $x^2y^4-49=\left(xy^2+7\right)\left(xy^2-7\right)$

e) $x^8-1=\left(x^4+1\right)\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)$

FRANJA MORADA Económicas Lomas

Ejercicio Nº22

Combinando los diferentes métodos vistos factorizar los polinomios

a) x^3-7x^2+10x b) x^4-4x^2+4 c) x^3-1 d) x^5+x^2

e) $\left(x^2-16\right)\left(x^2+6x+9\right)$ f) $x^5-6x^4+11x^3-6x^2$

Respuestas:

a) $x^3-7x^2+10x=x(x-2)(x-5)$

b) $x^4-4x^2+4=\left(x+\sqrt{2}\right)^2\left(x-\sqrt{2}\right)^2$

c) $x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$

d) $x^5+x^2=x^2(x+1)\left(x^2-x+1\right)$

e) $\left(x^2-16\right)\left(x^2+6x+9\right)=(x+4)(x-4)(x+3)^2$

f) $x^5-6x^4+11x^3-6x^2=x^2(x-1)(x-3)(x-2)$

FRANJA MORADA Económicas Lomas

Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es una fracción en la cual tanto el numerador como el denominador son monomios y/o polinomios, es decir expresiones algebraicas enteras. Con ellas se opera en forma semejante a como lo hacemos con las fracciones numéricas. Primeramente recordemos como se las simplifica.

Simplificación de fracciones algebraicas

Hay que dividir al numerador y al denominador por un factor común que posean los mismos y no se anule.
Por lo tanto debemos determinar los factores que poseen los dos polinomios. Para ello es necesario factorizarlos, y posteriormente se divide a ambos por los factores comunes, *aclarando que se excluyen los valores numéricos que hacen tomar a éstos el valor cero*
Ejemplos:

a) Sea $\dfrac{x^2-9}{x^2+6x+9}$ la fracción que queremos simplificar.

El numerador lo factorizamos como una diferencia de cuadrados y el denominador como un trinomio cuadrado perfecto

$$\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)^2}$$

Los dos tiene en común el binomio (x +3). Los dividimos por el mismo teniendo presente que esto es válido si $x+3\neq 0$, es decir si $x\neq -3$. Queda

$$\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)^2}=\frac{x-3}{x+3} \quad \text{con } x\neq -3$$

Quiere decir que ambas fracciones se equivalen para cualquier número real diferente de (–3).

b) Simplificar la fracción $\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$

Solución:
Factorizamos a ambos polinomios hallando los ceros de los mismos. Para ello aplicamos la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado.

$$x^2-7x+10=0 \Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4.1.10}}{2.1}=\frac{7\pm 3}{2}\Rightarrow x_1=5 \ \wedge \ x_2=2$$

$$x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4.1.6}}{2.1}=\frac{5\pm 1}{2}\Rightarrow x_1=3 \ \wedge \ x_2=2$$

Sustituimos los polinomios por su forma factorizada quedando

$$\frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}=\frac{(x-5)(x-2)}{(x-3)(x-2)}=\frac{x-5}{x-3}$$ con la condición que los denominadores no se anulen, o sea $x\neq 3 \ \wedge \ x\neq 2$

Ejercicio N°23

Simplificar las fracciones

a) $\dfrac{3x+6}{x^3+8}$ b) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-6x^2+11x-6}$ c) $\dfrac{(x^2-9)(x^2-x-30)}{(x^2-9x+18)(x+3)}$ d) $\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+4x+3}$

Respuestas:

a) $\dfrac{3x+6}{x^3+8}=\dfrac{3(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\dfrac{3}{x^2-2x+4}$ con $x\neq -2$

b) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-6x^2+11x-6}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\dfrac{1}{x-3}$ con $x\neq 1 \wedge x\neq 2 \wedge x\neq 3$

c) $\dfrac{(x^2-9)(x^2-x-30)}{(x^2-9x+18)(x+3)}=\dfrac{(x+3)(x-3)(x-6)(x+5)}{(x-6)(x-3)(x+3)}=x+5$ con $x\notin\{3\ ;\ -3\ ;\ 6\}$

d) $\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+4x+3}=\dfrac{(x+1)(x-1)(x+3)}{(x+3)(x+1)}=x-1$ con $x\neq -1 \wedge x\neq -3$

Suma y resta de fracciones algebraicas

Las fracciones deben tener el mismo denominador, y en este caso se opera directamente con los numeradores dejando el mismo denominador.

Si los denominadores son diferentes, debemos hallar fracciones equivalentes a las mismas que tengan el mismo denominador. A este proceso se lo denomina *reducir a común denominador.*

El denominador común es un múltiplo de los denominadores de las fracciones dadas, habiendo infinitos pero generalmente se toma el de grado menor, al cual llamamos mínimo común denominador.

Se lo obtiene multiplicando los factores comunes y no comunes (están en todos o en algunos) de los denominadores, los que previamente deben ser factorizados. En conclusión procedemos así:

- Descomponemos a los denominadores en sus factores
- Formamos el mínimo común denominador
- Dividimos al mismo por el denominador de cada fracción y el resultado se multiplica por el correspondiente numerador.
- Se opera con los numeradores obtenidos, dando un polinomio que se factoriza para simplificarlo con el común denominador.

Tener siempre presente que las fracciones tienen sentido para valores que no hagan cero los denominadores de alguna de ellas.

Ejemplo:

$$\frac{2x}{x^2-4}+\frac{x-3}{x^2-3x+2}-\frac{1}{x+2}=\frac{2x}{(x+2)(x-2)}+\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}-\frac{1}{x+2}=$$

$$=\frac{2x(x-1)+(x-3)(x+2)-1(x-2)(x-1)}{(x+2)(x-2)(x-1)}=$$

$$=\frac{2x^2-2x+x^2+2x-3x-6-x^2+2x+x-2}{(x+2)(x-2)(x-1)}=\frac{2x^2-8}{(x+2)(x-2)(x-1)}$$

$$=\frac{2(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)(x-1)}=\frac{2}{x-1} \quad \text{con } x\neq -2 \wedge x\neq 2 \wedge x\neq 1$$

Ejercicio N°24

Calcular las fracciones equivalentes a :

a) $\frac{x+2}{x-1}-\frac{x-1}{x+2}$

b) $\frac{2x}{x^2-1}+\frac{x+1}{x^2-3x+2}-\frac{3}{x-2}$

c) $\frac{x^2+3x-4}{x^2-5x+6}+\frac{1-x}{x-3}-\frac{1}{x-2}$

Respuestas:

a) $\frac{x+2}{x-1}-\frac{x-1}{x+2}=\frac{3(2x+1)}{(x-1)(x+2)}$ con $x\neq 1 \wedge x\neq -2$

b) $\frac{2x}{x^2-1}+\frac{x+1}{x^2-3x+2}-\frac{3}{x-2}=\frac{2}{1-x^2}$ con $x\neq 1 \wedge x\neq -1 \wedge x\neq 2$

c) $\frac{x^2+3x-4}{x^2-5x+6}+\frac{1-x}{x-3}-\frac{1}{x-2}=\frac{5x-3}{(x-3)(x-2)}$ con $x\neq 3 \wedge x\neq 2$

Multiplicación y división de fracciones

Para multiplicar las fracciones algebraicas se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí, dando respectivamente el numerador y el denominador de la fracción resultado.

Si se conocen factores comunes a ambos se los puede simplificar con las debidas aclaraciones de no nulidad.

En el caso de la división se la transforma en multiplicación, para lo cual la primer fracción se multiplica por la recíproca de la segunda, es decir del divisor.

Ejemplos:

a) $\frac{x^2+3x-10}{x^2-1}.\frac{x^2+2x-3}{x+5}.\frac{x+1}{x^2-6x+8}=$ factorizamos a cada polinomio y simplificamos los factores comunes entre algún numerador y algún denominador.

$$= \frac{(x-2)(x+5)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x+3)(x-1)}{x+5} \cdot \frac{x+1}{(x-2)(x-4)} = \frac{x+3}{x-4} \qquad \text{con } x \notin \{-5;\ 2;\ 1;\ -1;\ 4\}$$

b) $\dfrac{x^3-1}{x^2-4} : \dfrac{x-1}{x^2-4x+4}$ factorizamos y convertimos la división en multiplicación

$$= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{(x-2)^2}{x-1} = \frac{(x^2+x+1)(x-2)}{x+2} \qquad \text{con } x \notin \{-2;\ 2;\ 1\}$$

Ejercicio N°25

Realizar los cálculos

a) $\left(\dfrac{x-1}{x+2} - 2\right) : \dfrac{x+5}{x^2-4}$

b) $\left(\dfrac{x^2-4}{x-1} - x\right) : \dfrac{x^2-4}{x-1}$

c) $\left(\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}\right) . \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x}$

d) $\left(\dfrac{x^2-21x-7}{7-x}\right) : \left(\dfrac{4x+1}{7+x} + \dfrac{2x+1}{7-x}\right)$

Respuestas:

a) $\left(\dfrac{x-1}{x+2} - 2\right) : \dfrac{x+5}{x^2-4} = 2-x$ siendo $x \notin \{-2;\ 2;\ -5\}$

b) $\left(\dfrac{x^2-4}{x-1} - x\right) : \dfrac{x^2-4}{x-1} = \dfrac{x-4}{x^2-4}$ siendo $x \notin \{-2;\ 2;\ 1\}$

c) $\left(\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}\right) . \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x} = \dfrac{1}{x+3}$ siendo $x \notin \{0;\ 2;\ 1;\ -3\}$

d) $\left(\dfrac{x^2-21x-7}{x-7}\right) : \left(\dfrac{4x+1}{7+x} + \dfrac{2x+1}{7-x}\right) = \dfrac{1}{2}(7+x)$

si $x \neq 7 \ \wedge \ x \neq -7 \ \wedge \ x \neq \dfrac{21 \pm \sqrt{469}}{2}$

FRANJA MORADA Económicas Lomas

Ecuaciones en R

Una ecuación es una igualdad en la cual intervienen uno o más valores desconocidos que se representan con letras y se llaman incógnitas, verificándose la igualdad para ciertos valores de las incógnitas.

En caso de satisfacerse la igualdad para *cualquier valor* que demos a las letras (dentro del conjunto de elementos con el cual operamos) se llama *identidad.*

Ejemplo:

a) $3x^2+5x-2=x$ con $x \in R$ es una *ecuación* en R con una incógnita, pues:

- es una igualdad
- aparece el valor desconocido representado con x
- y si $x=2$ no se satisface la igualdad.

b) $x^2-4=(x+2)(x-2)$ con $x \in R$ es una identidad en R, pues:

- $\forall x \in R$ la igualdad se verifica.

c) $3+\frac{5}{2}=\frac{11}{2}$ es una *igualdad* pero no es una ecuación, pues:

- *no hay* ninguna *incógnita*

d) $x^3-4x-10$ no es una ecuación pues:

- *hay un valor desconocido representado por x* pero no es una igualdad.

En definitiva para que una expresión sea una ecuación debe satisfacer tres condiciones:

- *Ser una igualdad*
- *Haber valores desconocidos(incógnitas)*
- *Existen números que puestos en lugar de las incógnitas no satisfacen la igualdad*

Clasificación de ecuaciones

Las ***ecuaciones se clasifican*** por la *cantidad de incógnitas* (cada una representada con una letra diferente x, y, z, u, etc). Con una, dos, tres, etc.incógnitas.

También teniendo en cuenta las *operaciones u operadores que afectan a las incógnitas.* Pueden ser: algebraicas, trascendentes, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, matriciales, diferenciales, integrales, etc.

Las *ecuaciones algebraicas* son las que pueden escribirse como una *expresión algebraica igualada a cero*. Recordemos que en una expresión algebraica la (o las) variables intervienen en operaciones algebraicas. Es decir como sumandos, minuendos, sustraendos, factores, divisores, bases de potencias y radicandos.

Ejemplos:

$$5x+21=0 \quad ; \quad -\frac{3}{2}x^3+4x-10=0 \quad ; \quad \frac{3x+1}{x-2}+\frac{4}{3x-1}=0 \quad ; \quad \sqrt[3]{2x-1}-4x+1=0$$

Dentro de las algebraicas las más simples son las que se expresan por medio de un polinomio igualado a cero o forma equivalente. Se las denomina *ecuaciones enteras o*

polinómicas. En este tipo de ecuaciones la incógnita no puede aparecer en un divisor ni bajo el operador de radicación. De los ejemplos anteriores las dos primeras son polinómicas.
Le siguen en grado de dificultad las *ecuaciones fraccionarias* donde la incógnita interviene en uno o más divisores; hay fracciones algebraicas. De los ejemplos, la tercera es fraccionaria.
Por último tenemos las *ecuaciones irracionales* en las cuales la incógnita aparece en uno o más radicandos, es decir que está afectada por el operador de radicación. La última de los ejemplos es un caso de ecuación irracional.

Grado de una ecuación

*Las ecuaciones **polinómicas** se clasifican por el **grado**, que está indicado por el grado del polinomio reducido igualado a cero.*

Ejemplos:
a) $3x+6=0$ es una ecuación *polinómica* con *una* incógnita de *grado uno*
b) $2x^2+6x-12=0$ es una ecuación *entera* con *una* incógnita de *grado dos*
c) $x^3+6x-25=0$ es una ecuación *polinómica* con *una* incógnita de *grado tres*
d) $(x-1)^2+(3x-2)(x+2)=0$ es *polinómica* pero para determinar el grado hay que reducir a su expresión mínima al polinomio. Para ello operamos:
$(x-1)^2+(3x-2)(x+2)=x^2-2x+1+3x^2+6x-2x-4=4x^2+2x-3$ resultando la ecuación $4x^2+2x-3=0$ la cual es de *grado dos.*

Solución de una ecuación

Una solución de una ecuación con una incógnita, es todo número real que sustituido en lugar de la incógnita en la ecuación hace verdadera a la igualdad.

Esto se expresa diciendo que *verifica* o *satisface* a la ecuación. El conjunto formado por todas las soluciones de la ecuación se denomina ***conjunto solución S.***
Resolver una ecuación consiste en hallar el conjunto solución.
En el caso de las enteras, escritas como un polinomio igualado a cero, para resolver la ecuación hay que hallar los ceros o raíces del polinomio. El conjunto solución está formado por los ceros del polinomio. Luego la cantidad de soluciones de la ecuación en *R*, coincide con la de ceros del polinomio en *R*. Como lo hemos visto en polinomios, esa cantidad *a lo sumo es igual al grado de la ecuación, o menor en un número par.*
Una ecuación de grado 1 tiene una solución real.
Una de grado dos tiene 2 soluciones reales o ninguna.
Una de grado 3 tiene tres soluciones reales o una.
La de grado 4 tiene cuatro soluciones reales, dos o ninguna. Etc.
En forma excepcional se puede dar el caso que el conjunto solución sea vacío, es decir que la ecuación no tiene solución. No hay ningún número real que la verifique.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones se llaman equivalentes cuando tienen el mismo conjunto solución.

La forma de resolver una ecuación es obtener ecuaciones equivalentes a la primera, que sean cada vez más simples. La más sencilla es aquella en la cual en un miembro de la igualdad (generalmente el primero) se encuentra la incógnita (sin ninguna operación sobre ella) y en el otro un número. Este es precisamente una solución de todas las ecuaciones que se fueron obteniendo en este proceso (todas equivalentes).
Para obtener ecuaciones equivalentes nos basamos principalmente en dos propiedades de las ecuaciones que pasamos a citar.

- *Si a ambos miembros de una ecuación se les suma un mismo número o expresión que contenga a la incógnita, la ecuación obtenida es equivalente a la primera.*
- *Si a ambos miembros de una ecuación se los multiplica por un número diferente de cero, o una expresión de la incógnita que sea diferente de cero, la ecuación que se obtiene es equivalente a la inicial.*

La primera propiedad se utiliza cuando queremos ***eliminar*** en uno de los miembros de la ecuación a un ***término***. En este caso sumamos a los dos el opuesto del mismo

Ejemplo:
Sea $3x+6=8+7x$ y queremos eliminar del segundo miembro a 7x. Para ello sumamos a los dos miembros el opuesto, es decir (–7x) quedando $3x+6+(-7x)=8+7x+(-7x)$ Aplicando las propiedades de la suma se reducen términos y resulta $-4x+6=8$ que es equivalente a la primera pero más simple.

La segunda propiedad se utiliza para ***suprimir un factor o divisor*** de un término. Se multiplican los dos miembros por el inverso o recíproco del mismo.

Tener presente que se multiplican todos los términos de los dos miembros pues se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y resta.

Veamos un ejemplo. Sea la misma ecuación anterior $3x+6=8+7x$ y nos proponemos eliminar el factor 7 del segundo término del segundo miembro. Para ello multiplicamos los dos miembros por 1/7 (recíproco de 7) y resulta

$\frac{1}{7}(3x+6)=\frac{1}{7}(8+7x)$ a continuación utilizamos la propiedad distributiva citada

$\frac{3}{7}x+\frac{6}{7}=\frac{8}{7}+x$ como vemos el factor 7 se eliminó en el término en que estaba

El proceso por el cual se deja a la incógnita en un solo miembro de la igualdad (no apareciendo en ningún otro lado) se denomina ***despejar la incógnita***.

Es conveniente tener en cuenta que para poder despejar a la incógnita debemos obtener una ecuación equivalente a la dada en la cual la misma aparezca en un solo lugar.

Apliquemos las propiedades para resolver ecuaciones de primer grado.

a) Sea la ecuación $3x+6=8$. Como la incógnita está en un solo lugar es fácil despejarla. Esto se puede hacer de dos formas diferentes. En la primera *eliminamos primero al 6* que está en el miembro de la "x". Para ello sumamos (–6) a los dos miembros y queda:
$3x+6+(-6)=8+(-6)$ operamos $\Rightarrow$ $3x=2$. Ahora se debe *eliminar el factor 3* que multiplica a "x" para lo cual ambos miembros se multiplican por el recíproco que es 1/3

dando $\frac{1}{3}.3x=\frac{1}{3}.2$ y operando según propiedades queda $x=\frac{2}{3}$ llegando así a la solución de la ecuación. El conjunto solución es $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

Otra forma de proceder es *eliminar primero al factor 3*. Multiplicamos por 1/3 ambos miembros de la ecuación inicial $\frac{1}{3}.(3x+6)=\frac{1}{3}.8$ operamos $\Rightarrow\ x+2=\frac{8}{3}$. Para despejar "*x*" hay que *eliminar al 2*. Lo logramos sumando en los dos miembros el opuesto (– 2)

$$x+2+(-2)=\frac{8}{3}+(-2)\ \Rightarrow\ x=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$$

b) Tenemos la ecuación con una incógnita $\frac{2x+1}{3}+\frac{x-2}{2}=\frac{1-3x}{4}+x$

Vemos que los denominadores complican la ecuación. Sería conveniente eliminarlos para lo cual hay que multiplicar por un número que sea múltiplo simultáneo de 3, 2, y 4. Hay infinitos múltiplos comunes y como es fácil comprobarlo, son 12, 24, 36, etc. El menor de todos ellos se llama *mínimo común múltiplo* y es 12. Luego *multiplicamos por 12 ambos miembros*, y aplicando la propiedad distributiva correspondiente es lo mismo que multiplicar ***todos*** los términos. Así resulta

$12.\frac{2x+1}{3}+12.\frac{x-2}{2}=12.\frac{1-3x}{4}+12.x$ simplificando y distribuyendo nuevamente queda

$8x+4+6x-12=3-9x+12x\Rightarrow\ 14x-8=3+3x$ No podemos reducir más a cada miembro. El paso a seguir es *eliminar a una de las "x"* para que quede una sola, por ejemplo a 3x. Para ello sumamos (–3x) a los dos miembros $14x-8+(-3x)=3+3x+(-3x)\Rightarrow 11x-8=3$ Eliminamos el (–8) sumando 8 $11x-8+8=3+8\Rightarrow 11x=11$

Por último multiplicamos por 1/11 quedando la solución $x=1$. Entonces es $S=\{1\}$

La solución se puede verificar sustituyendo en la ecuación inicial la "x" por 1 y ver que da igual resultado en los dos miembros.

Ejercicio Nº 26

Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado y verificar la solución hallada

a) $3(2x-4)=\frac{3}{2}(4-3x)$ b) $5(2-6x)-3(4x+2)=0$ c) $\frac{3-2x}{5}=\frac{4x+1}{3}$

d) $\frac{x+1}{2}+3=\frac{2x+3}{3}+\frac{1}{4}$ e) $3x-2(1-5x)+7=10$ f) $2(6x-2)=3(4x+1)$

g) Comprobar si 2 y (–5) son soluciones de la ecuación $-x^2-3x+10=0$

Respuestas

a) $x=\frac{12}{7}$ b) $x=\frac{2}{21}$ c) $x=\frac{2}{13}$ d) $x=\frac{27}{2}$ e) $x=\frac{5}{13}$

f) no tiene solución g) los dos valores satisfacen la ecuación

Ecuaciones de grado mayor que uno

Las ecuaciones de grado uno (con coeficiente de x diferente de cero) siempre tienen una solución, la que se obtiene despejando a la incógnita. Sabemos que para poder despejar la incógnita la misma debe aparecer en un solo lugar de la ecuación. Si interviene en más de uno hay que realizar un trabajo previo para que desaparezca de todos, menos uno.
En una ecuación de grado dos la incógnita está en dos lugares y no se pueden juntar pues los monomios que la contienen no son semejantes: $ax^2+bx+c=0$.
Vamos a explicar para los alumnos curiosos como se resuelve. Se pueden saltear los pasos siguientes.

OPTATIVO

Resolución de la ecuación de segundo grado

Partimos de $ax^2+bx+c=0$. Como la incógnita aparece en dos monomios que no son semejantes, debemos utilizar algún método que nos permita reunir a las "x". El polinomio es un trinomio de segundo grado, tratemos de transformarlo en un trinomio cuadrado perfecto. Debe haber dos cuadrados y el otro ser el doble producto de las bases de los cuadrados. El primer monomio tiene ya x^2, pero la a no está al cuadrado. Para que tenga exponente 2 multiplicamos ambos miembros por a, quedando:

$$a^2x^2+abx+ac=a0=0 \quad \Rightarrow \quad (ax)^2+(ax)b+ac=0$$

Tenemos ya el cuadrado del primer término del binomio a obtener. Falta el doble producto del primero por el segundo. Evidentemente tiene estar (ax) que es el primero. Esto ocurre en el segundo término, pero falta el 2 de doble. Para que aparezca el 2, multiplicamos por 2 al segundo monomio, y para que no se modifique lo dividimos por 2 al mismo tiempo:

$(ax)^2+2.(ax).\frac{b}{2}+ac=0$. Ya aparecen el cuadrado del primero y el doble del primero por el segundo, el cual es claramente $\frac{b}{2}$. Nos falta el cuadrado del segundo, o sea $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Lo sumamos a ambos miembros dando: $(ax)^2+2.(ax).\frac{b}{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2+ac=0+\left(\frac{b}{2}\right)^2$

En el primer miembro consideramos los tres primeros monomios, los que forman un trinomio cuadrado perfecto, pudiendo ser escrito $\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2$. Nos queda así la ecuación transformada en la equivalente $\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2+ac=\left(\frac{b}{2}\right)^2$ en la cual la x está en un solo lugar.

Por lo tanto podemos despejarla. Comenzamos sumando $(-ac)$ a ambos lados

$$\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2+ac+(-ac)=\left(\frac{b}{2}\right)^2+(-ac) \quad \Rightarrow \quad \left(ax+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}-ac \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left(ax+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4} \Rightarrow \left(ax+\frac{b}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4}} \Rightarrow$ sumamos $\left(-\frac{b}{2}\right)$ y luego multiplicamos por $\left(\frac{1}{a}\right)$

$$\left(ax+\frac{b}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4}} \Rightarrow ax=-\frac{b}{2}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Esta es la fórmula, muy conocida, para resolver la ecuación de segundo grado en forma directa, sin efectuar todos los pasos que planteamos anteriormente, en cada problema.
Las ecuaciones de *tercer grado* y las de *cuarto grado* también tienen métodos de resolución exactos. La fórmula que resuelve las de tercer grado se llama *fórmula de Cardano-Tartaglia* en homenaje a los que la desarrollaron. Se usa muy escasamente y nosotros no la vamos a utilizar. Las de mayor grado que cuatro no se pueden resolver en forma exacta salvo casos especiales o sencillos.
Este apartado está destinado a los alumnos que tienen curiosidad por saber el origen de ciertos métodos que en la enseñanza media no se explican.

Resolución de ecuaciones enteras de grado mayor a dos

En base a las necesidades del plan de estudios, las ecuaciones de grado mayor que dos, cuando aparecen son muy sencillas. Generalmente se trata de obtener algún cero del polinomio, para que posteriormente por medio de la regla de Ruffini, se reduzca el orden de la ecuación. Si es de grado tres y conocemos una raíz se la puede reducir a una de grado dos, y posteriormente resolverla por la fórmula ya explicada. Si es de grado cuatro necesitamos conocer dos raíces para bajarla a grado dos.
Si los coeficientes son enteros podemos utilizar el teorema de Gauss ya visto para determinar las raíces enteras o racionales.

Cuando el polinomio está factoreado e igualado a cero, se debe recordar que un producto da cero cuando al menos uno de los factores es cero.

De esta manera la ecuación original se desdobla en ecuaciones de menor grado.3

Ejemplos de resolución de ecuaciones enteras:

a) Hallar el conjunto solución de: $(3x-2)(x-5)+\left(\frac{1}{2}-x\right)=\frac{1}{2}(1-10x)$

Se trata de una ecuación entera que debe reducirse a un polinomio igualado a cero. Para ello operamos algebraicamente con las expresiones dadas.

$$(3x-2)(x-5)+\left(\frac{1}{2}-x\right)=\frac{1}{2}(1-10x) \Rightarrow 3x^2-15x-2x+10+\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}-5x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2-18x+\frac{21}{2}=\frac{1}{2}-5x \quad \Rightarrow \quad 3x^2-18x+5x+\frac{21}{2}-\frac{1}{2}=0 \quad \Rightarrow 3x^2-13x+10=0$$

Llegamos a la forma más reducida de la ecuación. Es de grado dos y aplicamos la fórmula respectiva:

$$3x^2-13x+10=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{13\pm\sqrt{13^2-4.3.10}}{2.3}=\frac{13\pm 7}{6} \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{10}{3} \ \wedge \ x_2=1$$

$$\boxed{S=\left\{1;\ \frac{10}{3}\right\}}$$

b) Resolver la ecuación: $\left(2x^2+4x-4\right)\left(x+1\right)=2x^2+3x+2$

Reducimos el polinomio

$$\left(2x^2+4x-4\right)\left(x+1\right)=2x^2+3x+2 \quad \Rightarrow \quad 2x^3+2x^2+4x^2+4x-4x-4=2x^2+3x+2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 2x^3+6x^2-4-2x^2-3x-2=0 \quad \Rightarrow \quad 2x^3+4x^2-3x-6=0$$

Entonces la ecuación es $2x^3+4x^2-3x-6=0$ que es de tercer grado, con coeficientes enteros. Buscamos una raíz aplicando Gauss.

Divisores del independiente $6=\left\{\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6\right\}$ (posibles numeradores)

Divisores del coeficiente de mayor grado $2=\left\{\pm 1;\ \pm 2\right\}$ (posibles denominadores)

Posibles ceros racionales $=\left\{\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{3}{2}\right\}$

Vamos sustituyendo en el polinomio $P(x)=2x^3+4x^2-3x-6$ hasta hallar algún cero.

$P(1)=2.1^3+4.1^2-3.-6=-3\neq 0$

$P(-1)=2(-1)^3+4(-1)^2-3(-1)-6=-1\neq 0$

$P(2)=2.2^3+4.2^2-3.2-6=20\neq 0$

$P(-2)=2(-2)^3+4(-2)^2-3(-2)-6=0$; entonces (-2) es un cero y podemos dividir al polinomio por $(x+2)$ y el resto es cero. Lo hacemos empleando la regla de Ruffini. El cociente que se obtiene es: $2x^2-3$. Igualando a cero este cociente resulta una ecuación de segundo grado que permite hallar otras dos raíces de la ecuación original.

$$2x^2-3=0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2=3 \quad \Rightarrow \quad x^2=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

El conjunto solución de la ecuación es: $\boxed{S=\left\{-2;\ \sqrt{\frac{3}{2}};\ -\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}}$

c) Resolver la ecuación $\left(x^2-3x+2\right)\left(x+6\right)=0$

Como se trata de un producto que da cero, alguno de los factores debe dar cero. Por lo tanto la ecuación se desdobla en

$$x^2-3x+2=0 \qquad \vee \qquad x+6=0$$

La primera es de segundo grado y sus soluciones son

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4.1.2}}{2.1}=\frac{3\pm 1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1=2 \ ; \ x_2=1$$

y la segunda es de primer grado con solución $x=-6$

El conjunto solución es $\boxed{S=\{2;\ 1;\ -6\}}$

d) Hallar el conjunto solución de: $(2x-1)^2=(3x-2)^2+x-1$

Operamos algebraicamente llevando el polinomio al más reducido posible. Desarrollamos los cuadrados

$$4x^2-4x+1=9x^2-12x+4+x-1 \Rightarrow 4x^2-4x+1=9x^2-11x+3$$

Formamos cero en el segundo miembro

$$4x^2-4x+1-9x^2+11x-3=0 \Rightarrow -5x^2+7x-2=0$$

Llegamos a una ecuación de segundo grado

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-7\pm\sqrt{49-4.(-5).(-2)}}{2.(-5)}=\frac{-7\pm3}{-10} \Rightarrow x_1=1\ ;\ x_2=\frac{2}{5}$$

$$\boxed{S=\left\{\frac{2}{5};\ 1\right\}}$$

Ejercicio N° 27

Resolver las siguientes ecuaciones enteras con una incógnita

a) $(x+1)^2+3=x(3x-5)$

b) $(x-1)(14x+1)=(x^2-1)+2(x^3+5)$

c) $(x^3+3x^2-4)(x^2-9)=0$

Respuestas:

a) $S=\left\{4;\ -\frac{1}{2}\right\}$ b) $S=\left\{2;\ -\frac{1}{2};\ 5\right\}$ c) $S=\{1;\ 3;\ -3;\ -2\ doble\}$

Ecuaciones fraccionarias

En este tipo de ecuaciones aparecen fracciones algebraicas, es decir que la incógnita está al menos en un denominador. Para resolverlas se las transforma en ecuaciones enteras equivalentes (exceptuando los valores que anulan los denominadores).

Esto se logra multiplicando los dos miembros de la ecuación por un polinomio que sea múltiplo de todos los denominadores, es decir el mínimo común múltiplo de los denominadores. Se lo obtiene factorizando los denominadores y luego tomando los facctores comunes y no comunes con el exponente más alto.

Se debe tener en cuenta que los números que anulan al polinomio por el cual multiplicamos deben excluirse.

De esta forma los denominadores se simplifican y se llega a una ecuación entera.

El problema se reduce a uno ya visto.

Ejemplos:

a) Resolver $\dfrac{3x+1}{x+1}+x=2x+1$

Sumamos $(-x)$ a ambos miembros quedando $\dfrac{3x+1}{x+1}=x+1$

Multiplicamos ambos miembros por $(x+1)\neq 0 \Rightarrow x\neq -1$ (queda excluido el valor (-1))

$$(x+1)\frac{3x+1}{x+1}=(x+1)(x+1) \qquad \text{y simplificando llegamos a}$$

$$3x+1=(x+1)^2 \Rightarrow 3x+1=x^2+2x+1 \Rightarrow$$

Sumamos $-(3x+1)$ a ambos miembros para eliminarlo del primer miembro e igualar a cero

$$0=x^2+2x+1-(3x+1) \Rightarrow 0=x^2+2x+1-3x-1 \Rightarrow x^2-x=0$$

Factorizando $x(x-1)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=1$. Entonces $\boxed{S=\{0;\ 1\}}$

b) Hallar las soluciones de la ecuación fraccionaria

$$\frac{2x^2-5x+1}{x^2-4}+\frac{x+3}{x+2}=\frac{3x-7}{x-2}$$

Factorizamos los denominadores:

$x^2-4=(x+2)(x-2)$; $x+2 \wedge x-2$ son de grado 1. No se factorizan.

El mínimo común múltiplo es $(x+2)(x-2)$. Multiplicamos todos los términos de ambos miembros por el mismo. Excluimos los valores 2 y (-2) que lo anulan.

$$(x+2)(x-2)\frac{2x^2-5x+1}{(x+2)(x-2)}+(x+2)(x-2)\frac{x+3}{x+2}=(x+2)(x-2)\frac{3x-7}{x-2}$$

Simplificando en cada término resulta la ecuación entera

$$2x^2-5x+1+(x-2)(x+3)=(x+2)(3x-7)$$

La reducimos a su mínima expresión

$$2x^2-5x+1+x^2+3x-2x-6=3x^2-7x+6x-14$$

$$3x^2-4x-5=3x^2-x-14 \Rightarrow 3x^2-4x-5-3x^2+x+14=0 \Rightarrow -3x+9=0$$

La ecuación dada es equivalente a la ecuación entera de grado uno

$$-3x+9=0 \Rightarrow 9=3x \Rightarrow 3=x \Rightarrow S=\{3\}$$

Ejercicio N° 28

Hallar los conjuntos solución de las ecuaciones fraccionarias

a) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{3x}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x-3}{x}+\dfrac{6}{5}=\dfrac{8}{2x-5}$

c) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{17}{20}$

d) $\dfrac{2x-3}{x-2}+\dfrac{3x-5}{x-3}=\dfrac{3x+1}{x^2-5x+6}$

Respuestas:

a) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{3x}{x^2-1}$ $\quad S=\left\{-\dfrac{3}{4}\right\}$

b) $\dfrac{x-3}{x}+\dfrac{6}{5}=\dfrac{8}{2x-5}$ $\quad S=\left\{\dfrac{15}{22};\ 5\right\}$

c) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{17}{20}$ $\quad S=\left\{4;\ -\dfrac{5}{17}\right\}$

d) $\dfrac{2x-3}{x-2}+\dfrac{3x-5}{x-3}=\dfrac{3x+1}{x^2-5x+6}$ $\quad S=\left\{\dfrac{18}{5};\ 1\right\}$

FRANJA MORADA
Económicas
Lomas

Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

Una ecuación con dos incógnitas es una igualdad con dos valores desconocidos que comúnmente se representan con las letras x e y.

Una solución de la misma es un par ordenado de números reales. El primero se le asigna a la x y el segundo a la y. Para que sea una ecuación, cualquier par ordenado **no** debe satisfacer la igualdad. De lo contrario se trataría de una *identidad.*
Las que tienen mayor aplicación son las de *grado uno*, que se denominan *ecuaciones lineales.*
Una ecuación lineal con dos incógnitas se puede escribir en general $ax+by=c$ siendo a, b, c números reales que se llaman *coeficientes de las incógnitas* a los dos primeros, y *término independiente* al tercero.
Una ecuación de este tipo tiene infinitas soluciones, infinitos pares ordenados de reales que verifican a la igualdad.
Una forma de obtener las soluciones es asignar un valor cualquiera a una de las incógnitas, reemplazarlo en la ecuación, y luego calcular el de la otra incógnita por despeje de la misma.

Ejemplo: sea la ecuación $3x+5y=2$. Queremos hallar tres soluciones de la misma. Para ello le damos a la x tres valores diferentes, sustituimos y calculamos el correspondiente de y.

Si $x=2$ resulta $3.2+5y=2 \Rightarrow 6+5y=2 \Rightarrow 5y=-4 \Rightarrow y=-\frac{4}{5}$

Si $x=-2$ obtenemos $3.(-2)+5y=2 \Rightarrow -6+5y=2 \Rightarrow 5y=8 \Rightarrow y=\frac{8}{5}$

Si $x=\frac{1}{3}$ resulta $3.\frac{1}{3}+5y=2 \Rightarrow 1+5y=2 \Rightarrow 5y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{5}$

Tres soluciones de la ecuación son $\left(2;-\frac{4}{5}\right)$; $\left(-2;\frac{8}{5}\right)$; $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{5}\right)$.
Es fácil ver que la cantidad de soluciones es infinita.
Usando un par de ejes cartesianos ortogonales, cada par ordenado de números reales se representa por medio de un punto del plano. Las infinitas soluciones de la ecuación anterior representadas dan los puntos de una recta del plano.

El conjunto solución de una ecuación lineal con dos incógnitas se representa geométricamente por un recta del plano cartesiano.

Consideremos ahora otra ecuación más, que tenga las mismas incógnitas (se representan con las mismas letras), también lineal. Nos proponemos hallar pares de números que satisfagan a las dos ecuaciones simultáneamente. Esto constituye un sistema de dos ecuaciones, con dos incógnitas, de primer grado. Vulgarmente se denomina un *sistema lineal de orden 2x2* (el primer número indica la cantidad de ecuaciones y el segundo la de incógnitas). Un sistema así se escribe en general

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

Veamos un ejemplo: $\begin{cases} 3x+5y=2 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$. La primera es la ecuación del ejemplo anterior de la cual hallamos tres soluciones. Comprobemos si también son soluciones de la segunda. Para ello sustituimos el primer número del par en lugar de x y el segundo en lugar de y.

Resulta:

$\left(2;\ -\frac{4}{5}\right)$ $\quad 2.2+3.\left(-\frac{4}{5}\right)=4-\frac{12}{5}=\frac{8}{5}\neq 4$ no verifica, no es solución.

$\left(-2;\ \frac{8}{5}\right)$ $\quad 2.(-2)+3.\frac{8}{5}=-4+\frac{24}{5}=\frac{4}{5}\neq 4$ no verifica, no es solución

$\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{5}\right)$ $\quad 2.\frac{1}{3}+3.\frac{1}{5}=\frac{2}{3}+\frac{3}{5}=\frac{19}{15}\neq 4$ no verifica, no es solución

Se comprueba que las soluciones de una ecuación generalmente no verifican la otra ecuación, no son soluciones de esta otra. Sin embargo existen pares ordenados de números que satisfacen a ambas ecuaciones. Se los llama *soluciones del sistema lineal*, y el conjunto de todas las soluciones es el *conjunto solución del sistema lineal*.

Este conjunto puede demostrarse que a veces es vacío, es decir que no hay ningún par de números que verifique a las dos ecuaciones a la vez. Un sistema así se llama ***incompatible***.

Geométricamente esto ocurre cuando los conjuntos solución de ambas ecuaciones son rectas paralelas.

Cuando el conjunto solución no es vacío, es decir existe al menos una solución, el sistema es ***compatible***.

Si la solución es única el conjunto solución es unitario. Sistemas de este tipo se llaman ***determinados***.

Las rectas correspondientes a los conjuntos solución de ambas ecuaciones se cortan en un punto.

Por último hay sistemas que tienen infinitas soluciones, infinitos pares de reales que satisfacen a las dos ecuaciones. Son los sistemas ***indeterminados***.

Las rectas correspondientes a los conjuntos solución de ambas ecuaciones se superponen, son coincidentes..

Resumiendo:

Si existe solución es compatible, pudiendo ser determinado si es única, o indeterminado si son infinitas. Si no hay solución es incompatible.

¿Cómo hallamos las soluciones del sistema?

La idea es transformar el problema en otro que ya sepamos resolver. En este caso, a partir del sistema, obtener una ecuación con una incógnita.

Hay diferentes métodos para obtener esta ecuación, los cuales tienen diferentes nombres: de *sustitución*, de *igualación*, de *sumas y restas* o de *Gauss*, de *determinantes*. Para obtener la ecuación con una incógnita debemos eliminar a una de ellas. Por tal motivo a los diferentes métodos se los conoce como *métodos de eliminación*.

Método de sustitución

Consiste en despejar en una de las ecuaciones de primer grado a una de las incógnitas. Queda así la incógnita despejada en función de la otra. A continuación, la expresión de esta incógnita se sustituye en la otra ecuación, resultando una nueva con una sola incógnita. En un sistema lineal la misma es de primer grado, pero en sistemas no lineales puede ser de grado mayor. Esta se resuelve y se conoce así uno de los números que forman parte de la solución. Para conocer la otra componente del par, se sustituye el número calculado en el despeje realizado y se opera.

Ejemplos:

a) Sea $\begin{cases} 3x+y=3 \\ 2x+3y=-5 \end{cases}$ se trata de un sistema lineal con dos incógnitas, o sea 2x2

Vamos a despejar a una de las incógnitas y esto podemos realizarlo de cuatro formas distintas: "x" o "y" en la primera o en la segunda. Conviene despejar la incógnita que tenga coeficiente 1 o (–1) si lo hay. En este caso la "y" de la primera ecuación. Para ello sumamos (–3x) a ambos miembros dando

$$3x+y=3 \Rightarrow y=3-3x \qquad (1)$$

Sustituimos 3 –3x en lugar de "y" en la otra ecuación, es decir en la segunda. De esta forma obtenemos una ecuación que contiene solamente a la incógnita "x" a la cual resolvemos

$$2x+3(3-3x)=-5 \Rightarrow 2x+9-9x=-5 \Rightarrow -7x+9=-5$$

sumamos (–9) a ambos miembros $-7x+9=-5 \Rightarrow -7x=-14$

multiplicamos por $\left(-\frac{1}{7}\right) \Rightarrow x=(-14)\left(-\frac{1}{7}\right)=2 \Rightarrow x=2$

El valor de la incógnita "x" lo remplazamos en (1)

$$y=3-3x=3-3.2=-3 \Rightarrow y=-3$$

El conjunto solución del sistema tiene como elemento un par ordenado de números reales, siendo la primera componente el valor de "x" y la segunda el de "y", indicándose $(2;-3)$.

$$\boxed{S=\{(2;-3)\}}$$

El sistema anteriormente resuelto es ***compatible y determinado***.
Las soluciones obtenidas se pueden verificar reemplazando en las ecuaciones iniciales los valores obtenidos de las incógnitas debiendo resultar verdaderas las igualdades.

$$3.2+(-3)=3$$

$$2.2+3(-3)=-5$$

b) Consideremos el sistema lineal $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=-1 \\ \frac{1}{4}x+2y=5 \end{cases}$

Podemos eliminar los denominadores de los coeficientes y de esta forma trabajar con números enteros. Para ello multiplicamos a cada ecuación por un número que sea múltiplo de los denominadores. La primera por 6 y la segunda por 4.

El sistema se transforma en el equivalente $\begin{cases} 3x+2y=-6 \\ x+8y=20 \end{cases}$

Ahora despejamos la "x" de la segunda por ser más simple

$$x+8y=20 \Rightarrow x=20-8y \quad (1).$$

Lo sustituimos en la primera dando

$$3(20-8y)+2y=-6 \Rightarrow 60-24y+2y=-6 \Rightarrow 60-22y=-6$$

$$60-22y=-6 \Rightarrow -22y=-6-60 \Rightarrow -22y=-66 \Rightarrow y=\frac{-66}{-22}=3 \Rightarrow \boxed{y=3}$$

Vamos a (1) y sustituimos el valor de "y" obtenido

$$x=20-8y=20-8.3=-4 \Rightarrow x=-4 \Rightarrow \boxed{x=-4}$$

El sistema es determinado y el conjunto solución es $\boxed{S=\{(-4\,;3)\}}$

Método de igualación

Para eliminar a una de las incógnitas procedemos de la siguiente forma. Despejamos la misma incógnita en ambas ecuaciones. Luego igualamos los segundos miembros, ya que los primeros son iguales por ser la misma incógnita. Resulta así una ecuación con una sola incógnita, que resuelta da los valores de la misma. Para obtener los de la otra, estos se reemplazan en uno de los despejes realizados.

Ejemplos:

Resolver por igualación el sistema: $\begin{cases} 3x-5y=-19 \\ 2x+3y=57 \end{cases}$

Despejamos la misma incógnita en las dos ecuaciones, por ejemplo la x en ambas

$3x-5y=-19 \Rightarrow 3x=-19+5y \Rightarrow x=\frac{-19+5y}{3}$

$2x+3y=57 \Rightarrow 2x=57-3y \Rightarrow x=\frac{57-3y}{2}$. Igualamos los segundos miembros

$$\frac{-19+5y}{3}=\frac{57-3y}{2}$$

$$-38+10y=171-9y \Rightarrow 10y+9y=171+38 \Rightarrow 19y=209 \Rightarrow y=\frac{209}{19}=11 \Rightarrow \boxed{y=11}$$

El valor obtenido de y lo reemplazamos en el primer despeje de x

$$x=\frac{-19+5y}{3}=\frac{-19+5.11}{3}=\frac{55-19}{3}=\frac{36}{3}=12 \Rightarrow \boxed{x=12} \Rightarrow \boxed{S=\{(12;11)\}}$$

b) Resolver por igualación $\begin{cases} 3x+4y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}y+14 \\ \frac{x+y}{3}=\frac{y-x}{7} \end{cases}$

Lo primero que hacemos es estandarizar a las dos ecuaciones. La primera la multiplicamos por 10 para eliminar denominadores y luego juntamos en un miembro a las incógnitas

$$10(3x+4y)=10\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}y+14\right) \Rightarrow 30x+40y=5x+2y+140 \Rightarrow 25x+38y=140$$

La segunda la multiplicamos por 21 y luego juntamos en un miembro a las incógnitas

$$\frac{x+y}{3}=\frac{y-x}{7} \Rightarrow 21.\frac{x+y}{3}=21.\frac{y-x}{7} \Rightarrow 7x+7y=3y-3x \Rightarrow 10x=-4y \Rightarrow 10x+4y=0$$

El sistema en forma estandarizado es $\begin{cases} 25x+38y=140 \\ 10x+4y=0 \end{cases}$

Aplicamos el método de igualación despejando en las dos ecuaciones la y

$$25x+38y=140 \Rightarrow 38y=140-25x \Rightarrow y=\frac{140-25x}{38}$$

$$10x+4y=0 \Rightarrow 4y=-10x \Rightarrow y=-\frac{10x}{4}=-\frac{5}{2}x$$

Igualamos los despejes de y : $\frac{140-25x}{38}=-\frac{5}{2}x$; multiplicamos por 38

$$\frac{140-25x}{38}.38=-\frac{5}{2}x.38 \Rightarrow 140-25x=-95x \Rightarrow 140=-95x+25x \Rightarrow -70x=140 \Rightarrow x=-$$

Resulta $\boxed{x=-2}$. El valor de x lo sustituimos en el segundo despeje de y, con lo cual

$$y=-\frac{5}{2}x=-\frac{5}{2}.(-2)=5 \Rightarrow \boxed{y=5}$$

El conjunto solución es $\boxed{S=\{(-2;5)\}}$

Método de reducción (o de Gauss)

En este método se elimina una de las incógnitas entre las dos ecuaciones por medio de sumas y restas. Se suman miembro a miembro ambas ecuaciones con el objeto que una de las incógnitas se elimine. Esto es factible si los coeficientes de la incógnita a eliminar son iguales u opuestos. Si son iguales se restan las ecuaciones y si son opuestos se suman.

FRANJA MORADA Económicas Lomas

Los números iguales como los opuestos tienen el mismo módulo. Quiere decir que si los coeficientes de la incógnita que se desea suprimir no son de igual módulo no se puede aplicar el método. Para lograr que los módulos se igualen se multiplica a cada una de las ecuaciones por un número adecuado. Cada una de las ecuaciones se multiplica por el coeficiente de la incógnita considerada en la otra ecuación. La primera por el coeficiente de la segunda y la segunda por el coeficiente de la primera. En la práctica pueden utilizarse otros números cuando esos coeficientes no son primos entre si (coprimos).

Ejemplos:

a) Resolver por el método de reducción el sistema $\begin{cases} 3x-5y=-19 \\ 3x+3y=57 \end{cases}$

Observamos los módulos de una misma incógnita. Vemos que los de x son iguales. Por lo tanto restando miembro a miembro las dos ecuaciones la x desaparece

$$(3x-5y)-(3x+3y)=-19-57 \Rightarrow 3x-5y-3x-3y=-76 \Rightarrow -8y=-76 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=\frac{-76}{-8}=\frac{19}{2}$$

El valor obtenido lo sustituimos en la la primera ecuación para calcular el de x

$$3x-5y=-19 \Rightarrow 3x-5.\frac{19}{2}=-19 \Rightarrow 3x=-19+\frac{95}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{3}.\frac{57}{2}=\frac{19}{2}$$

El sistema es compatible, determinado, con solución única. Luego: $\boxed{S=\left\{\left(\frac{19}{2};\frac{19}{2}\right)\right\}}$

b) Resolver por reducción $\begin{cases} 3x+8y=10 \\ 5x-4y=8 \end{cases}$

Observando los coeficientes de una misma incógnita vemos que son de diferente módulo. Debemos igualar el de alguna para eliminarla. Igualemos los de x. Los coeficientes 3 y 5 son primos entre si. Luego multiplicamos la primera por 5 (coeficiente en la segunda), y la segunda por 3 (coeficiente en la primera). El sistema equivalente al dado es

$\begin{cases} 15x+40y=50 \\ 15x-12y=24 \end{cases}$. Ahora las restamos miembro a miembro quedando

$$(15x+40y)-(15x-12y)=50-24 \Rightarrow 52y=26 \Rightarrow y=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}$$

Si hubiéramos querido eliminar la y hay que igualar los módulos de sus coeficientes: 8 y 4. Como no son primos (uno es múltiplo del otro) podemos dejar la primera igual y multiplicar la segunda por 2, obteniendo

$\begin{cases} 3x+8y=10 \\ 10x-8y=16 \end{cases}$ sistema equivalente al dado. Sumando miembro a miembro se elimina y quedando $3x+10x=10+16 \Rightarrow 13x=26 \Rightarrow x=\frac{26}{13}=2$. El sistema es compatible y determinado con una solución $\boxed{S=\left\{\left(2;\frac{1}{2}\right)\right\}}$

Aclaración

En el segundo paso del ejercicio anterior se podría multiplicar la primera por 4 y la segunda por 8 (cruzado) y también se logra eliminar la y.

Sistemas de ecuaciones mixtos

Son sistemas (los que vemos) de dos ecuaciones con dos incógnitas siendo de diferente grado las ecuaciones. Vamos a considerar que una de ellas es lineal, en todos los casos, y la otra de grado mayor al primero. Lo más común es que sea 2 o 3.

Se resuelven por el método de sustitución, despejando en la que es lineal una de las incógnitas. El valor despejado se sustituye en la de grado mayor resultando una ecuación con una incógnita de grado igual a la original. Los pasos siguientes son similares al método de sustitución para sistemas lineales.

Ejemplo:

a) Resolver el sistema mixto $\begin{cases} -2x+y=-1 \\ y+1=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{9}{2} \end{cases}$

Hay dos incógnitas, la primera ecuación es de primer grado y la segunda de grado dos.

Despejamos en la primera la y resultando $-2x+y=-1 \Rightarrow y=2x-1$

Lo remplazamos en la segunda

$$(2x-1)+1=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{9}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2-3x+\frac{9}{2}=2x \Rightarrow \frac{1}{2}x^2-5x+\frac{9}{2}=0$$

Multiplicamos por dos para obtener coeficientes enteros y resulta

$$x^2-10x+9=0 \Rightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4.1.9}}{2.1}=\frac{10\pm 8}{2} \Rightarrow x_1=9 \wedge x_2=1$$

Reemplazamos en $y=2x-1$ los valores hallados de la x para obtener los de y.

$$y_1=2x_1-1=2.9-1=17 \qquad y_2=2x_2-1=2.1-1=1$$

El sistema tiene dos soluciones, cada una formada por un par ordenado.

$$\boxed{S=\{(9;17);(1;1)\}}$$

b) Resolver el sistema mixto de ecuaciones $\begin{cases} y=x^2-4x+3 \\ 2x+3y=2 \end{cases}$

La primera ecuación es de grado 2 y la segunda de grado 1. Para despejar fácilmente se lo puede hacer en la lineal (de grado 1), tanto x como y, o si no la y en la primera que no aparece al cuadrado. Evidentemente en la primera ya tenemos despejada a la y, por lo que nos ahorramos ese trabajo. Sustituyendo en la segunda el valor de "y" queda

$$2x+3(x^2-4x+3)=2 \Rightarrow 2x+3x^2-12x+9=2 \Rightarrow 3x^2-10x+7=0$$

que es de segundo grado. La resolvemos con la fórmula

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-10)\mp\sqrt{(-10)^2-4.3.7}}{2.3}=\frac{10\pm4}{6}\Rightarrow x_1=\frac{7}{3}\ \wedge\ x_2=1$$

Sustituyendo en la primera los valores de x hallados obtenemos los de y

$$y_1=\left(\frac{7}{3}\right)^2-4.\frac{7}{3}+3=\frac{49}{9}-\frac{28}{3}+3=-\frac{8}{9} \qquad ; \qquad y_2=1^2-4.1+3=1-4+3=0$$

El conjunto solución es: $\boxed{S=\left\{\left(\frac{7}{3};-\frac{8}{9}\right);(1;0)\right\}}$

Ejercicio N° 29

Resolver los sistemas de ecuaciones lineales o mixtos verificando las soluciones obtenidas

a) $\begin{cases}3x+4y=1\\2x+y=-1\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x-2y=-4\\-5x+3y=5\end{cases}$ c) $\begin{cases}y=3x-\frac{5}{2}\\6x+2y=5\end{cases}$

d) $\begin{cases}x^2+3x-y=0\\2y=5x+3\end{cases}$ e) $\begin{cases}\frac{x+1}{4}+\frac{y-1}{2}=2\\x-y=1\end{cases}$ f) $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x^2\\2x-y=2\end{cases}$

Respuestas:

a) $S=\{(-1;1)\}$

b) $S=\{(2;5)\}$

c) $S=\left\{\left(\frac{5}{6};0\right)\right\}$

d) $S=\left\{(1;4);\left(-\frac{3}{2};-\frac{9}{4}\right)\right\}$

e) $S=\left\{\left(\frac{11}{3};\frac{8}{3}\right)\right\}$

f) $S=\{(2;2)\}$

FRANJA MORADA Económicas Lomas

Inecuaciones en R

Una inecuación es una desigualdad en la cual intervienen uno o más valores desconocidos, representados por letras.

Nos limitamos a ver las de una indeterminada o variable.
Ejemplos:

$5x^2+3\geq 4x$ $\qquad$ $5y+3x\geq 4$ $\qquad$ $\dfrac{2x+4}{x^2-6x-12}\leq 0$ $\qquad$ $4x-16x^3<0$

Una *solución* de una inecuación con una incógnita en R es todo número real que sustituido en lugar de esa incógnita verifica la desigualdad.
El conjunto de todas las soluciones es el *conjunto solución*.

Veamos si (–3) es solución de $5x+2\leq 6$. Al sustituirlo en lugar de x verifica la desigualdad $5.(-3)+2=-15+2=-13\leq 6$ que es verdadero.

Propiedades de las desigualdades entre reales.

Para resolver las inecuaciones, o sea hallar su conjunto solución, se utilizan las propiedades de las desigualdades entre números reales. Estas son:

1-*Si a ambos miembros de una desigualdad se les suma un mismo número real, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido que la dada.*

$$\forall x\in R,\ \forall y\in R,\ \forall z\in R\ \ si\ \ x<y\ \Rightarrow x+z<y+z$$
$$\forall x\in R,\ \forall y\in R,\ \forall z\in R\ \ si\ \ x>y\ \Rightarrow x+z>y+z$$

2-*Si a ambos miembros de una desigualdad se los multiplica por un mismo número real, diferente de cero, se obtiene una desigualdad del mismo sentido que la dada, si el número es positivo, y de sentido contrario, si es negativo.*

$$\forall x\in R,\ \forall y\in R,\ \forall z\in R,\ \wedge\ z>0\ \ si\ \ x<y\ \Rightarrow x.z<y.z$$
$$\forall x\in R,\ \forall y\in R,\ \forall z\in R,\ \wedge\ z>0\ \ si\ \ x>y\ \Rightarrow x.z>y.z$$
$$\forall x\in R,\ \forall y\in R,\ \forall z\in R,\ \wedge\ z<0\ \ si\ \ x<y\ \Rightarrow x.z>y.z$$
$$\forall x\in R,\ \forall y\in R,\ \forall z\in R,\ \wedge\ z<0\ \ si\ \ x>y\ \Rightarrow x.z<y.z$$

La forma de proceder para resolver a las inecuaciones de primer grado es análoga a la utilizada anteriormente en las ecuaciones. Hay que prestarle atención a la eliminación de factores negativos pues en esos casos se multiplica por un número negativo y ***la desigualdad cambia de sentido***.

Veamos algunos ejemplos que aclaran la forma de resolución de inecuaciones sencillas.

a) Hallar el conjunto solución de $3x+6\leq 0$ en $\boldsymbol{R}$.
Debemos eliminar al 3 y al 6 que acompañan a la x, pudiendo empezar por cualquiera de ellos. Para que 6 desaparezca del miembro de x sumamos el opuesto (–6) a ambos

miembros, manteniendo el sentido de la desigualdad (propiedad 1) dando $3x+6+(-6) \le 0+(-6) \Rightarrow 3x \le -6$. Ahora eliminamos el 3 multiplicando ambos miembros por 1/3, que al ser positivo no modifica el sentido de la desigualdad $\frac{1}{3}.3x \le \frac{1}{3}(-6) \Rightarrow x \le -2$. Esta última inecuación es equivalente a la inicial, teniendo el mismo conjunto solución, el cual se expresa como el intervalo

$$\boxed{S=(-\infty;\ -2]}$$

b) Consideremos la inecuación $4-3x \ge 7+2x$ y determinemos que números reales la satisfacen

Como la x está en dos lugares, lo primero que hacemos es eliminar a uno de los términos que la contienen. Por ejemplo $2x$, para lo cual sumamos $(-2x)$ y resulta:

$$4-3x+(-2x) \ge 7+2x+(-2x) \Rightarrow 4-5x \ge 7$$

eliminamos 4 sumando (–4) a ambos miembros

$$4-5x+(-4) \ge 7+(-4) \Rightarrow -5x \ge 3$$

Nos resta suprimir el factor (–5) que multiplica a la x para lo cual multiplicamos los dos miembros por (–1/5), que al ser negativo *cambia el sentido de la desigualdad* ¡¡cuidado¡¡

$$\left(-\frac{1}{5}\right)(-5x) \le \left(-\frac{1}{5}\right)3 \Rightarrow x \le -\frac{3}{5}.$$

Luego el conjunto solución es $\boxed{S=\left(-\infty;\ -\frac{3}{5}\right]}$

c) Consideremos ahora la inecuación doble $3 \le 4-3x \le 8$

Son dos desigualdades que pueden resolverse por separado y luego considerar las soluciones comunes a ambas, es decir la intersección de los dos conjuntos solución. Como la x está solamente en el medio podemos operar con las dos simultáneamente de esta forma: $3 \le 4-3x \le 8$

sumamos (–4) para eliminar el 4, entonces:

$$3+(-4) \le 4-3x+(-4) \le 8+(-4) \Rightarrow -1 \le -3x \le 4$$

y ahora para que desaparezca (–3) que es un factor, multiplicamos por (–1/3), que al ser negativo hace cambiar el sentido de las desigualdades

$$\left(-\frac{1}{3}\right)(-1) \ge \left(-\frac{1}{3}\right)(-3x) \ge \left(-\frac{1}{3}\right)4 \Rightarrow \frac{1}{3} \ge x \ge -\frac{4}{3}$$

queda la x sola, despejada. Escribiendo las desigualdades de menor a mayor es:

$$-\frac{4}{3} \le x \le \frac{1}{3}$$

que corresponde a un intervalo cerrado $\boxed{S=\left[-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right]}$

Ejercicio Nº 30

Calcular el conjunto solución de las siguientes inecuaciones y expresarlo por medio de operaciones entre intervalos

a) $5x+3\leq 6$ b) $4-5x<8$

c) $3+2x<6x+7$ d) $4-3x<-6$

Respuestas:

a) $S=\left(-\infty;\ \frac{3}{5}\right]$ b) $S=\left(-\frac{4}{5};\ +\infty\right)$

c) $S=\left(-1;\ +\infty\right)$ d) $S=\left(\frac{10}{3};\ +\infty\right)$

Ejemplo con dos desigualdades

Hallar el conjunto de reales que cumplen

$$3x-2<2x+3\leq 5-4x$$

Se trata de dos desigualdades que resolvemos separadamente.

1°) $3x-2<2x+3$, sumamos $(-2x)$ queda, $x-2<3$, sumamos 2, $x<5$. Luego

$$\boxed{S_1=\left(-\infty;\ 5\right)}$$

2°) $2x+3\leq 5-4x$, sumamos $(4x)$ queda, $6x+3\leq 5$, sumamos (-3), $6x\leq 2$, por $\left(\frac{1}{6}\right)$ da, $x\leq\frac{1}{3}$. Por lo tanto $\boxed{S_2=\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right]}$

Como deben satisfacerse simultáneamente las dos condiciones, las dos desigualdades, los números deben estar en S_1 y S_2, o sea en la intersección. La solución final es:

$$S=S_1\cap S_2=\left(-\infty;\ 5\right)\cap\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right]=\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right]$$

Ejercicio Nº 31

Calcular el conjunto solución de las siguientes inecuaciones y expresarlo por medio de operaciones entre intervalos

a) $-3\leq 5-3x<6$ b) $2\geq 5+2x>-4$

c) $2(3-2x)<5(4x-2)$ d) $x\leq 3x+2<6+x$

e) $3-2x<4+3x<3+2x$

Respuestas:

a) $S=\left(-\frac{1}{3};\ \frac{8}{3}\right]$ b) $S=\left(-\frac{9}{2};\ -\frac{3}{2}\right]$ c) $S=\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$

d) $S=\left[-1;\ 2\right)$ e) $\varnothing$

Módulo de un número real. Inecuaciones con módulo

Hemos presentado el concepto de módulo de un real cuando presentamos a los números enteros. El módulo de un real se define teniendo en cuenta si el real es positivo, cero o negativo.

Coloquialmente podemos decir que el módulo de un número negativo es su opuesto; el módulo de cero es cero, y el módulo de un número positivo es el mismo número.

Esto se expresa simbólicamente de la siguiente forma:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ (-x) & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Por consiguiente el módulo de un real nunca es negativo: $\forall x \in R \quad |x| \geq 0$

Propiedades del módulo

1) *El módulo de una suma de reales es menor o igual que la suma de los módulos de los sumandos*

$$\forall x \in R, \quad \forall y \in R, \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

2) *El módulo de una resta de reales es mayor o igual que el módulo de la diferencia entre los módulos*

$$\forall x \in R, \quad \forall y \in R, \quad |x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$$

3) *El módulo de un producto de reales es igual al producto de los módulos de los factores*

$$\forall x \in R, \quad \forall y \in R, \quad |x.y| = |x|.|y|$$

4) *El módulo de una división de reales es igual a la división de los módulos del dividendo y del divisor, siempre que éste no sea cero.*

$$\forall x \in R, \quad \forall y \in R, \quad |x:y| = |x|:|y| \quad \text{si} \quad y \neq 0$$

5) Si $k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \big(|x| = k \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm k\big)$

6) Si $k > 0 \quad \Rightarrow \quad \big(|x| < k \quad \Leftrightarrow \quad -k < x < k\big)$

7) Si $k > 0 \quad \Rightarrow \quad \big(|x| > k \quad \Leftrightarrow \quad \big(x > k \ \vee \ x < -k\big)\big)$

Las tres últimas se refieren a cuando el módulo de un número es igual, menor o mayor que un real positivo.

- Para que sea igual, el número debe ser el positivo dado o su opuesto.
- Para que sea menor, el real está comprendido entre el dado y su opuesto.
- Para que sea mayor, debe ser mayor al dado o menor que el opuesto.

Ejemplos:

a) $|x| = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 6$

b) $|x| < 6 \quad \Leftrightarrow \quad -6 < x < 6$

d) $|x|>10 \Leftrightarrow (x<-10 \vee x>10)$

Ecuaciones e inecuaciones con módulo

Las *ecuaciones en las cuales la* ***x*** *aparece dentro de módulo* se resuelven eliminando las barras de módulo. Esto se hace en base a la propiedad

$$k \geq 0 \Rightarrow (|x|=k \Leftrightarrow x=\pm k)$$

Ejemplo

$|x+3|=6 \Rightarrow x+3=\pm 6$

Sumamos $(-3) \Rightarrow x+3+(-3)=\pm 6+(-3) \Rightarrow x=\pm 6-3 \Rightarrow (x=3 \vee x=-9)$

Luego la solución de la ecuación es $\boxed{S=\{3;\ -9\}}$

Las *inecuaciones con módulo* se transforman en inecuaciones sin módulo por medio de las propiedades $k>0 \Rightarrow (|x|<k \Leftrightarrow -k<x<k)$

$$k>0 \Rightarrow (|x|>k \Leftrightarrow (x>k \vee x<-k))$$

Ejemplos

a) $|2x+3| \leq 6 \Rightarrow -6 \leq 2x+3 \leq 6$, hemos aplicado la propiedad 6). Sumamos (–3) a los tres miembros $-9 \leq 2x \leq 3$, multiplicamos por $\frac{1}{2}$ entonces: $-\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$.

O sea que los reales que satisfacen la desigualdad dada están comprendidos entre $\left(-\frac{9}{2}\right.$ y $\left.\frac{3}{2}\right]$, incluyendo los extremos. Se trata de un intervalo cerrado de reales

$$\boxed{S=\left[-\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right]}$$

b) $|2x-3|>6$

Aplicamos la propiedad 7) entonces, $2x-3>6 \vee 2x-3<-6$, y de esta forma desaparecieron las barras de módulo, tenemos inecuaciones sin módulo. En las dos inecuaciones sumamos 3 a cada miembro resultando $2x>9 \vee 2x<-3$. Se elimina el factor 2 multiplicando por $\frac{1}{2}$ que al ser positivo no modifica el sentido de las desigualdades. $x>\frac{9}{2} \vee x<-\frac{3}{2}$. La primera tiene por solución el intervalo $\left(\frac{9}{2};\ +\infty\right)$ y la segunda el intervalo $\left(-\infty;\ -\frac{3}{2}\right)$.Como el conectivo lógico entre ambos es el "o" incluyente, se trata de la unión de ambos conjuntos, Por lo tanto el conjunto solución es

$$\boxed{S=\left(-\infty;\ -\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{9}{2};\ +\infty\right)}$$

c) $3<|3-2x|<9$

Se trata de dos inecuaciones simultáneas en las que interviene módulo. Las separamos y resolvemos cada una por su lado.

1°) $3<|3-2x|$, por propiedad 7) tenemos: $3-2x>3 \ \vee \ 3-2x<-3$, sumamos (-3) $-2x>0 \ \vee \ -2x<-6$, multiplicamos por $\left(-\frac{1}{2}\right)$ que al ser negativo cambia los sentidos de las desigualdades: $x<0 \ \vee \ x>3$. Llegamos a la $S_1=(-\infty;\ 0)\cup(3;\ +\infty)$

2°) $|3-2x|<9$, aplicamos la propiedad 6) con lo cual: $-9<3-2x<9$, sumamos (-3) $-12<-2x<6$, multiplicamos por $\left(-\frac{1}{2}\right)$ que al ser negativo cambia los sentidos de las desigualdades: $6>x>-3 \ \Leftrightarrow \ -3<x<6$. La solución es el intervalo abierto entre (-3) y 6. $S_2=(-3;\ 6)$. La solución finales la intersección de las dos soluciones halladas, una para cada inecuación

$$S=S_1\cap S_2=\left[(-\infty;\ 0)\cup(3;\ +\infty)\right]\cap(-3;\ 6)=(-3;\ 0)\cup(3;\ 6)$$

$$\boxed{S=(-3;\ 0)\cup(3;\ 6)}$$

Ejercicio N° 32:

Hallar los conjuntos solución de las siguientes ecuaciones e inecuaciones con módulo

a) $|x-2|=5$ b) $|4x-12|=0$ c) $|1-2x|=4$ d) $|x-2|=2x$

e) $|3x+2|\le 5$ f) $|x+5|>1$ g) $|2-3x|\ge 2$ h) $2\le|x-2|\le 5$

Soluciones:

a) $x=7 \ \vee \ x=-3$ b) $x=3$ c) $x=-\frac{3}{2} \ \vee \ x=\frac{5}{2}$

d) $\frac{2}{3}$ e) $\left[-\frac{7}{3};\ 1\right]$ f) $(-\infty;\ -6)\cup(-4;\ +\infty)$

g)) $(-\infty;\ 0]\cup\left[\frac{4}{3};\ +\infty\right)$ h) $[-3;\ 0]\cup[4;\ 7]$

APENDICE I

Conceptos básicos de lógica

Proposición

Es un conjunto de palabras que tiene sentido comunicacional, del cual se puede afirmar que tiene un valor de verdad (conocido o desconocido). Dicho valor es uno y solo uno de dos posibles: *verdadero* o *falso*.
La determinación del valor de verdad corresponde al campo de la ciencia o disciplina a la cual compete lo comunicado en la oración.
Ejemplos:

a) Dorrego fue gobernador de la provincia de Buenos Aires.
b) Los números naturales se emplean para contar los elementos de conjuntos finitos o infinitos numerables.
c) El Amazonas es el río más largo del mundo.
d) El símbolo matemático $\exists$ significa *pertenece.*
e) La educación es un derecho humano.
f) Existe vida afuera de la Tierra.

Las oraciones interrogativas, exclamativas e imperativas no son proposiciones, pues no tiene sentido hablar de valor de verdad de las mismas. Una pregunta, una orden o una exclamación, no son ni verdaderas ni falsas.
Ejemplos:

a) ¿Qué día es hoy?
b) ¡Qué belleza!
c) Realice el trabajo que le asigné.

Para referirnos a proposiciones en general se utilizan letras como **p, q, r, s,** etc.

Conectivos lógicos:

Las proposiciones anteriores son ejemplos de las llamadas *proposiciones simples*. Con las mismas se forman otras que se denominan *proposiciones compuestas*. Estas se obtienen con dos o más proposiciones simples, que se vinculan por medio de conectivos lógicos. Entre los mismos están: *conjunción, disyunción, implicación, equivalencia* y *negación*. La forma de definirlos es dando el valor de verdad de la proposición compuesta, conociendo los de las proposiciones simples que la forman. Esto se hace por medio de las llamadas *tablas de verdad*, que pasamos a detallar.

a) Conjunción lógica o producto lógico

Este conectivo se expresa por la conjunción "y". Se enuncia una proposición a continuación de la otra, separadas por la conjunción "y". El símbolo que la representa es $\wedge$. La expresión $p \wedge q$ se lee: "p y q" , siendo la tabla de verdad que la define la siguiente

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Para que la conjunción $p \wedge q$ sea verdadera, ambas proposiciones p, q deben ser verdaderas. En todo otro caso es falso.

b) **Disyunción lógica o suma lógica**

En este caso el conectivo que vincula ambas proposiciones se expresa "o". Hay dos tipos de disyunciones: la *excluyente* y la *incluyente*.
En el primer caso la proposición compuesta es verdadera si una o más proposiciones simples son verdaderas. En el segundo caso la proposición compuesta es verdadera si solamente una de las simples es verdadera. Los símbolos asignados a cada tipo de "o" son:

"o" incluyente : $\vee$ "o" excluyente: $\veebar$

Las tablas de verdad respectivas son

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

En Matemática se usa el "o" incluyente.

c) **Implicación o condicional**

La forma de vincular dos proposiciones por medio del condicional es la siguiente: "*si.....entonces.....*", siendo ocupados los puntos suspensivos por las proposiciones simples. La primera se llama *antecedente* y la segunda *consecuente*.

El valor de verdad del condicional es verdadero en todos los casos, menos uno. Este último corresponde a antecedente verdadero y consecuente falso.

La tabla definitoria del condicional es:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

d) **Doble implicación o equivalencia**

Dos proposiciones son equivalentes cuando cada una implica a la otra: "*si* **p** *entonces* **q**" *y a la vez "si* **q** *entonces* **p**".

Para que dos proposiciones sean equivalentes las mismas deben tener el mismo valor de verdad, o sea, ambas verdaderas o ambas falsas.

La tabla que define esta operación lógica es:

p	q	p ⇔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Cuando **p** y **q** son equivalentes también se expresa en la forma "**p** si y solo si **q**".

e) **Negación**

Consiste en anteponer a la proposición dada la palabra **"no"**, que se simboliza con **"–"** o también **" ~ "**. La tabla de verdad es

p	–p
V	F
F	V

Función proposicional

Es una expresión formada por palabras e indeterminadas, que cuando se sustituyen estas últimas por nombres se obtienen proposiciones.

Las indeterminadas se representan con letras como **x**, **y**, **z**, etc. Ejemplos:
" **x** es un animal vertebrado"; "**x** es hermano de **y**" ; " **z** está entre **x** e **y**"
La primera es una función proposicional en una indeterminada (o variable); la segunda es de dos indeterminadas y la tercera de tres variables. Las podemos llamar F(x), G(x;y) y H(x;y;z)

F(x) = **x** es un animal vertebrado";
G(x;y) = "**x** es hermano de **y**";
H(x;y;z)= " **z** está entre **x** e **y**"

Sustituyendo las variables por nombres adecuados se obtienen proposiciones.

F(tigre) = **"el tigre** es un animal vertebrado"; proposición verdadera
F(2) = **"2** es un animal vertebrado"; proposición falsa
F(ameba) = **"la ameba** es un animal vertebrado"; proposición falsa
G(Mercedes Sosa; Atahualpa Yupanqui) ="**Mercedes Sosa** es hermana de **Yupanqui** "; proposición falsa
H(2;1;3)= " **2** está entre **1** y **3**" proposición verdadera.

Cuantificadores

Son expresiones que aluden a la cantidad de nombres que convierten a la función proposicional en una proposición verdadera.

Un cuantificador es el *existencial* y expresa que al menos hay un nombre que genera, al ser sustituido en lugar de la variable a la cual alcanza, una proposición verdadera.
Se lo expresa diciendo: "existe al menos uno" y se lo simboliza $\exists$.
Aplicado a una función proposicional F(x) de una variable se escribe: $\exists x : F(x)$ que se lee "existe al menos un x tal que verifica F(x)" o más abreviadamente "existe x tal que F(x)".

"existe un animal tal que es vertebrado", en símbolos se escribe: $\exists x : F(x)$
"existe un número natural tal que sumado a 5 da 8", en símbolos: $\exists x$ natural : x+5=8
La negación de este cuantificador se expresa "no existe" y se simboliza con el mismo símbolo anterior pero cruzado con una barra.

El otro cuantificador es el *universal*, y se expresa "*cualquiera sea*" el elemento que tomemos dentro del conjunto o clase con que operamos: "cualquiera sea el país", "cualquiera sea el número natural", "cualquiera sea el ser humano". Se lo simboliza $\forall x$, lo cual se lee "*para todo x*" (se sobrentiende la clase a la cual pertenece x).

"todo animal es vertebrado" $\forall x$ animal: F(x)
"todo número real sumado con cero da el mismo número" $\forall x$ real: $x + 0 = 0 + x = x$

La negación de una proposición con un cuantificador equivale a cambiar un cuantificador por el otro (el existencial por el universal y viceversa) y luego negar la función proposicional a la que se aplica el primero, es decir:

$$-\exists x : F(x) \Leftrightarrow \forall x : -F(x)$$
$$-\forall x : F(x) \Leftrightarrow \exists x : -F(x)$$

Ejemplos:
a) "Todo cordobés es argentino" es una proposición cuya negación se puede redactar diciendo "Existe un cordobés que no es argentino". En símbolos:

Llamamos, F(x) = x es argentino. Es una función proposicional, con lo cual se escribe

"Todo cordobés es argentino" = $\forall x$ cordobés : F(x) , y la negación
"Existe un cordobés que no es argentino" = $-\forall x$ cordobés:F(x) $\Leftrightarrow \exists x$ cordobés : $-F(x)$

b) "Existe un número natural que sumado con 5 da por resultado 27" es una proposición en la cual interviene el cuantificador existencial. En lenguaje coloquial la negación es:
"No existe un número natural que sumado con 5 da por resultado 27".
Utilizando lenguaje simbólico tomemos la función proposicional $G(x) = (x + 5 = 27)$.
La negación es $-G(x) = (x + 5 \neq 27)$.
Entonces las proposiciones se escriben

$p = \exists x \in N \ tal \ que \ G(x)$, donde N indica al conjunto de los naturales.

$-p = -(\exists x \in N \ tal \ que \ G(x)) = \forall x \in N : \ -G(x) = \forall x \in N : \ x + 5 \neq 27$

APENDICE II

Conjuntos. Conceptos básicos

Acerca de lo que es un conjunto en Matemática daremos una idea intuitiva y no una definición rigurosa.

*Llamamos **conjunto** a una colección de objetos, a una pluralidad de entes.*

Esos objetos pueden ser concretos o abstractos, de la misma naturaleza o no. Lo que tienen en común es que se agrupan formando un nuevo ente u objeto al cual llamamos conjunto.
Para designar a los conjuntos se utilizan letras mayúsculas de imprenta como A, B, C, N, Q, R, etc.
Los objetos que forman el conjunto se llaman sus *elementos*. Si un objeto forma parte de un conjunto, es un elemento del conjunto, decimos que el mismo *pertenece* al conjunto. El símbolo $\in$ se lee *pertenece* y $\notin$, que es la negación, significa *no pertenece*.

Ejemplos: $a \in Q$,significa que a es un elemento del conjunto Q, que a pertenece al conjunto Q. En cambio $x \notin R$ expresa que el elemento x *no pertenece* al conjunto R.

Definición de un conjunto
Para definir un conjunto existen dos formas. Una se llama *por extensión* y otra *por comprensión*.

*Un conjunto se define por **extensión** nombrando a cada uno de sus elementos, separados por comas (cuando puede haber confusión se usa punto y coma), y encerrados entre llaves.*

Esta forma de definir un conjunto es aplicable a conjuntos finitos, con pocos elementos.
Ejemplos:

$A = \{Misiones, Corrientes, Entre\ Ríos\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$P = \{a, 3, e, 6, i, 9, o, 12, u\}$

Podemos escribir:

$Santa\ Fe \notin A$	$Misiones \in A$	$3 \notin A$	$Salta \notin A$	$a \notin A$
$6 \in B$	$0 \notin B$	$\{3\} \notin B$	$2 \in B$	$\{1,3\} \notin B$
$a \in P$	$\{a\} \notin P$	$\{3,6,9\} \notin P$	$u \in P$	$i \in P$

*Para definir un conjunto por **comprensión**, hay que dar una ley o propiedad que solamente la cumplan los elementos del conjunto.*

Por lo tanto van a pertenecer al conjunto los entes que verifican esa propiedad. La propiedad se expresa por medio de una función proposicional P(x). En general un conjunto definido por comprensión se escribe:

$$A=\{x \text{ tal que } P(x)\}=\{x \ : \ P(x)\}$$

Los conjuntos infinitos solamente se pueden definir correctamente por comprensión.
Los ejemplos anteriores se pueden definir por comprensión de la forma siguiente:

$$A=\{x \ : \ x \text{ es provincia de la Mesopotamia}\}$$

$$B=\{x \text{ es natural } : \ x \text{ es divisor de } 12\}=\left\{x\in N \ :12=\dot{x}\right\}$$

$$P=\left\{x \ : \ x \text{ es vocal} \vee (x=\dot{3} \wedge x\leq 12\right\}$$

Conjunto vacío

Es el conjunto que no tiene ningún elemento. Se lo simboliza $\varnothing$. Se lo puede definir por medio de una propiedad que no la verifique ningún objeto. Podemos poner:

$$\varnothing=\{\ \}=\{x \ : \ x\neq x\}$$

$$\varnothing=\{x \ : \ x \text{ es río brasileño que desemboca en el Mediterraneo}\}$$

Inclusión de conjuntos

*Un conjunto se dice que **está incluido** en otro (o que es parte de otro) cuando todo elemento del primero es también elemento del segundo.*

En símbolos:

$$A\subset B\Leftrightarrow(\forall x\in A\Rightarrow x\in B)$$

El símbolo $\subset$ se llama de inclusión. Todo conjunto está incluido en si mismo. El vacío está incluido en todo conjunto.

$$\forall A \quad A\subset A \quad ; \quad \forall A \quad \phi\subset A$$

Igualdad de conjuntos

Dos conjuntos son iguales cuando están formados por los mismos elementos.

Es decir que cada uno está incluido en el otro.

$$A=B \ \Leftrightarrow \ (A\subset B\wedge B\subset A)$$

Operaciones con conjuntos

a) **Unión**

*Se llama **unión** de dos conjuntos al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a uno u otro conjunto.*

Para que un elemento esté en la unión debe pertenecer a uno de los dos conjunto o a ambos (prestar atención que se utiliza el "o" incluyente).
En símbolos:

$$A\cup B=\{x \ : \ x\in A \ \vee \ x\in B\}$$

Si un conjunto está incluido en el otro, la unión da por resultado el que contiene

$$A\subset B \ \Leftrightarrow \ A\cup B=B$$

b) **Intersección**

Se llama intersección de dos conjuntos al conjunto formado por los elementos comunes a los dos conjuntos, es decir a los que pertenecen a ambos a la vez.

En símbolos:

$$A \cap B = \{x \ : \ x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

Cuando no hay elementos comunes a ambos conjuntos, la intersección da el conjunto vacío, y se dice que los conjuntos son disjuntos.

$$A \text{ disjunto } B \ \Leftrightarrow \ A \cap B = \varnothing$$

Si un conjunto está incluido en el otro, la intersección da por resultado el contenido

$$A \subset B \ \Leftrightarrow \ A \cap B = A$$

c) **Diferencia**

La diferencia entre el conjunto A y el B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al A y no al B.

En símbolos:

$$A - B = \{x \ : \ x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

Si A está incluido en B la diferencia da el vacío

$$A \subset B \ \Leftrightarrow \ A - B = \varnothing$$

FRANJA MORADA Económicas Lomas

Ejercitación de repaso

Conjuntos numéricos e intervalos

1) De los siguientes números decir cuales son racionales

$$\left\{-3;\ \frac{3}{2};\ \sqrt{5};\ 6;\ \pi;\ 3{,}85;\ \sqrt[3]{7}\right\}$$

Una de estas respuestas es la correcta

a) $\frac{3}{2}$ b) $-3;\ 6;\ \frac{3}{2}$ c) todos menos π d) $6;\ \frac{3}{2};\ 3{,}85;\ -3$ e) todos

2) Dar el valor de verdad de las proposiciones:

a) El producto de dos números reales es cero si al menos uno de ellos es cero.
b) El producto de dos números impares es impar.
c) La diferencia de dos números naturales es siempre un número natural.
d) El producto de dos números irracionales es siempre irracional.
e) La multiplicación de reales tiene las propiedades conmutativa y asociativa.

3) Decir cuales de las siguientes igualdades son verdaderas:

a) $(x+y)^3 = x^3 + y^3$ b) $-3^4 = 81$ c) $\sqrt[4]{x.y} = \sqrt[4]{x}.\sqrt[4]{y}$

d) $\left(x^3\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^9}$ d) $(a+b)^0 = 0$

4) Los siguientes cinco ejercicios de operaciones con reales tienen por resultados, en el orden dado, los números que se dan más abajo.

i) $-2+\frac{3}{4}$ ii) $\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)$

iii) $\dfrac{\frac{3}{5}-2^{-1}}{\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}}$ iv) $\left[\left(1+2^{-1}\right)^{-1}+3\right]^{-2} : \left(-\frac{3}{11}\right)$

v) $\left(\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}+2^{-1}\right)\left(\sqrt{1-\frac{3}{4}}+2^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}\right)$

Una de estas respuestas es la correcta

a) $-\frac{5}{4};\ -\frac{4}{9};\ \frac{1}{11};\ -\frac{3}{11};\ -\frac{5}{8}$ b) $-\frac{5}{4};\ \frac{1}{15};\ \frac{1}{11};\ -\frac{3}{11};\ -\frac{5}{2}$

c) $\frac{1}{2};\ \frac{1}{5};\ -\frac{20}{11};\ \frac{11}{3};\ \frac{5}{2}$ d) $-\frac{5}{4};\ -\frac{1}{15};\ -\frac{14}{11};\ \frac{44}{3};\ -\frac{5}{2}$

e) $-\frac{11}{4};\ \frac{1}{15};\ \frac{1}{11};\ -\frac{3}{11};\ \frac{5}{8}$

FRANJA MORADA Económicas Lomas

5) Las operaciones con los intervalos que se dan a continuación tiene por resultado:

i) $(-2;0) \cap (-1;1)$

Respuestas: a) $(-2;1)$ b) $(0;1)$ c) $(-2;-1)$ d) $(-1;0)$ e) $(0;-1)$

ii) $\left[-1;\ \frac{1}{2}\right) \cup \left(0;\ \frac{5}{2}\right]$

Respuestas: a) $\left(-1;\frac{5}{2}\right)$ b) $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ c) $\left[-1;\ \frac{5}{2}\right]$ d) $\left(-1;\ \frac{5}{2}\right]$ e) $\left[-1;\frac{5}{2}\right)$

iii) $\{x \in R / 2 \leq x \leq 4\} \cap \left\{x \in R / 4 \leq x \leq \frac{9}{2}\right\}$

Respuestas: a) $\varnothing$ b) (4) c) $\left(2;\ \frac{9}{2}\right)$ d) $\{4\}$ e) $\left[2;\ \frac{9}{2}\right)$

RESPUESTAS

1) La correcta es la d)

2) **i) V** **ii) V** **iii) F** **iv) F** **v) V**

3) **i) F** **ii) F** **iii) V** **iv) V** **v) F**

4) **i)** $-\frac{5}{4}$ **ii)** $\frac{1}{15}$ **iii)** $\frac{1}{11}$ **iv)** $-\frac{3}{11}$ **v)** $-\frac{5}{2}$

5) **i) La correcta es la d)**

ii) La correcta es la c)

iii) La correcta es la d)

FRANJA MORADA Económicas Lomas

Polinomios y factorización

Cada una de las siguientes proposiciones tiene varias respuestas; luego de analizarlas señalar la opción correcta

1) Un monomio es una expresión algebraica en la cual las operaciones que vinculan a las variables son

a) suma b) resta c) multiplicación d) ninguna de las anteriores

2) De las siguientes expresiones cuales son monomios

i) $3^{\frac{1}{2}}x^2y$ ii) $x^3y^{-\frac{1}{5}}$ iii) $\frac{x^5}{y^2}$ iv) $x^{18}2^{-\frac{3}{2}}y^3$

a) ii) y iii) b) i) y iv) c) ninguno d) todos

3) El grado del monomio $x^5 5^2 y^3$ es:

a) 5 b) 10 c) 8 d) 15

4) De las siguientes expresiones cuales son monomios semejantes

i) $\frac{1}{2}x^3y$ ii) z^3y iii) $y\sqrt{7}x^3$ iv) zy^3

a) i) y ii) b) ii) y iii) c) i) y iii) d) todos

5) De las expresiones siguientes cuales son polinomios

i) $5x^3y^{-3}+\frac{1}{y}$ ii) $\pi^5+3^{-1}x$ iii) $\frac{1}{x}+5x$ iv) $7^{-1}x^2+\sqrt{2}y^3$

a) i) y iii) b) ii) y iv) c) ninguno d) ii) y iii)

6) El grado del polinomio $P(x;y)=3^4x^3y^4+2x^5+5^3\pi e$ es:

a) 5 b) 11 c) 7 d) 16

7) De las siguientes expresiones cual es un polinomio homogéneo de grado 5

i) $5x^2y^3-x^3y^2+5$ ii) $x^5y^5+x^4y$ iii) $3x^3y+xy^3$ iv) $2x^3y^2-\frac{1}{2}x^2y^3$

a) i) b) ii) c) iii) d) iv)

8) El grado del <u>resto</u> de la división de dos polinomios, comparado con el grado del <u>divisor</u>, es:

a) mayor b)menor c) igual

9) Como es la proposición:"Toda división puede expresarse como la suma del cociente más la fracción entre el resto y el divisor"

a) Verdadero b) Falso

10) Cual opción hace verdadero el enunciado: "Si en una división de polinomios se llega a un resto parcial de grado

a) menor b) menor o igual

al del divisor, se detiene el proceso de división"

11) Al dividir dos polinomios de una variable, siempre es necesario ordenar los monomios en orden creciente de sus grados.

a) Verdadero b) Falso

12) En cuales de las siguientes divisiones es aplicable la regla de Ruffini

i) $\left(5x^3+x^2-2x+3\right):\left(x^2+1\right)$ ii) $\left(x^5+3x^4-x\right):\left(x+3\right)$

iii) $\left(x^2+1\right):\left(-2+x\right)$ iv) $\left(x^4-2x^3+6x^2+1\right):\left(x^3-2x\right)$

a) i) y iv) b) ii) y iii) c) sólo ii) d) i) y ii)

13) Los siguientes ejercicios de operaciones con polinomios tienen por resultado las expresiones que se dan más abajo, en el orden dado. Señalar la opción correcta:

i) $1,75y^3x^4-2,25x^4y^3+x^4y^3=$

ii) $-2x^4+5x^2+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}x^2+x-\frac{1}{5}x^4=$

iii) $\left(4,5x^5-3x^2+2x-5\right)-\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}x^5-4x^2+\frac{8}{3}\right)=$

iv) $\left(\frac{2}{7}x^5y^3\right)\left(-\frac{25}{3}y^4x\right)=$

v) $\left(-\frac{3}{2}x^4+\frac{2}{7}x^3-x+2\right)\left(-2x+3\right)=$

vi) $\left(3,5x^5-4x^3+2x-5\right)\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{2}x^2+x-\frac{7}{2}\right)=$

Opciones de respuestas:

a) R, P, T, U, S, Q b) T, S, R, P, Q, U

c) S, R, T, U, Q, P d) R, P, S, T, U, Q

Siendo:

$$P=-\frac{50}{21}x^6y^7 \qquad Q=3x^5-\frac{71}{14}x^4+\frac{6}{7}x^3+2x^2-7x+6$$

$$R=\frac{43}{10}x^5+x^2+\frac{4}{3}x-\frac{23}{3} \qquad S=-\frac{11}{5}x^4+\frac{11}{3}x^2+x+\frac{1}{3}$$

$$U=\frac{7}{4}x^8+\frac{35}{4}x^7+\frac{3}{2}x^6-\frac{89}{4}x^5-3x^4+\frac{33}{2}x^3-\frac{21}{2}x^2-12x+\frac{35}{2}$$

$$T=0,5x^4y^3$$

14) Los siguientes ejercicios de operaciones con polinomios tienen por resultados los cocientes dados por las expresiones que se dan más abajo, en el orden dado. Seleccionar la respuesta correcta.

i) $\left(8+x^3\right):\left(x-2\right)=$

ii) $\left(12x^3+6x^2-39x-6\right):\left(4x^2-6x-1\right)=$

iii) $\left(9x^5-23x^2+31x^4-24x+7x^3\right):\left(x^2-3x\right)=$

iv) $\left(3x^3-5x^2+3x-2\right):\left(x-1\right)=$

v) $\left(2x^4+17x^3-68x-36\right):\left(x+\frac{1}{2}\right)=$

vi) $\left(-1+x^7\right):\left(-1+x\right)=$

Opciones de respuestas

a) R, S, T, U, P, Q b) S, T, R, Q, P, U c) S, R, Q, T, P, U d) U, S, R, Q, T, P

Siendo: $P=2x^3+16x^2-8x-64$ $Q=9x^3+58x^2+181x+520$

$R=3x+6$ $S=x^2+2x+4$ $T=3x^2-2x+1$

$$U=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$$

15) La factorización de los siguientes polinomios se encuentra más abajo, en el orden dado. Seleccionar la opción correcta.

i) $P\left(x\right)=2x^3-8x^2+2x+12$

ii) $P\left(x\right)=x^4-4x^3-21x^2+64x+80$

iii) $P\left(x;y\right)=2x^6+5x^3y^2+2x^3y+5y^3$

iv) $P\left(x;y\right)=4x^2-20xy+25y^2$

v) $P(x) = 9x^2 - 81$

vi) $P(x) = x^4 - 2x^2 + x^3$

Opciones de respuestas

a) P, Q, R, S, U, T b) T, Q, P, S, U, R c) U, R, S, P, T, Q d) S, R, T, P, Q, U

Siendo: $P = (2x - 5y)^2$ $Q = x^2(x-1)(x+2)$

$R = (x-5)(x+1)(x+4)(x-4)$ $S = (2x^3 + 5y^2)(x^3 + y)$

$T = 9(x+3)(x-3)$ $U = 2(x-2)(x+1)(x-3)$

RESPUESTAS

1) c	**2) b**	**3) c**	**4) c**	**5) b**
6) c	**7) d**	**8) b**	**9) a**	**10) a**
11) b	**12) b**	**13) b**	**14) c**	**15) c**

FRANJA MORADA Económicas Lomas

Fracciones algebraicas y ecuaciones con una incógnita

Fracciones algebraicas

1) Al simplificar la fracción algebraica se obtiene una de las opciones indicadas

i) $\dfrac{4x^2+16x+16}{2x^2-8}$

a) $\dfrac{2(x+2)}{x-2}$ b) $\dfrac{2(x-2)}{x+2}$ c) $\dfrac{4(x+2)^2}{x-2}$ d) $\dfrac{4x(x+4)}{x+2}$

ii) $\dfrac{3x^2-3x}{2x^3-2x^2}$

a) $\dfrac{-3}{2x}$ b) $\dfrac{3}{2x}$ c) $\dfrac{2}{3x}$ d) $\dfrac{3}{2(x-1)}$

2) Las operaciones de suma y resta de fracciones algebraicas que siguen tienen por resultado uno de los señalados ¿Cuál es?

i) $\dfrac{8}{x^2-4}+\dfrac{x+4}{x+2}$

a) $\dfrac{x}{x+2}$ b) $\dfrac{-x}{x-2}$ c) $\dfrac{x}{x-2}$ d) $\dfrac{x+12}{x^2-4}$

ii) $\dfrac{x}{3x-9}-\dfrac{6}{x^2-9}$

a) $\dfrac{x-6}{3x+9}$ b) $\dfrac{x+6}{3x+9}$ c) $\dfrac{x+6}{3x-9}$ d) $\dfrac{x^2+3x+18}{3x^2-27}$

iii) $\dfrac{2}{x-5}-\dfrac{10}{x^2-25}-\dfrac{1}{x+5}$

a) $\dfrac{1}{x-5}$ b) $\dfrac{-1}{x-5}$ c) $\dfrac{1}{x+5}$ d) $\dfrac{x+20}{x^2-25}$

3) Resolver simplificando previamente, de ser posible

i) $\dfrac{2x-3}{x+5}\cdot\dfrac{x^2-25}{6x-9}$

a) $\dfrac{x-5}{3}$ b) $\dfrac{x+5}{3}$ c) $\dfrac{x-5}{-3}$ d) $\dfrac{x^2-25}{3}$

ii) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-1}:\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x-2}$

FRANJA MORADA Económicas Lomas

a) $\frac{x+2}{x+1}$ b) $\frac{x-2}{x-1}$ c) $\frac{x-2}{x+1}$ d) $\frac{x+2}{x-1}$

iii) $\frac{4-x^2}{2x-4}\cdot\frac{6}{x^2+4x+4}$

a) $\frac{-3}{x-2}$ b) $\frac{3}{x+2}$ c) $\frac{-3}{x+2}$ d) $\frac{3}{2-x}$

4) Operando con las fracciones algebraicas siguientes se llega a uno de los resultados que se indican en cada caso

i) $\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}\right):\frac{1}{x^2-4}$

a) 2 b) $-2x$ c) $2x$ d) $x+4$

ii) $\left(\frac{x^2}{4}-\frac{4}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{8-x^2}{x^2-4}+1\right)$

a) $\frac{x^2+4}{x^2}$ b) $\frac{x^2+4}{4x^2}$ c) $\frac{x^2-4}{x^2}$ d) $\frac{(x^2-4)(x-1)}{x^2+4}$

Ecuaciones polinómicas

5) El conjunto solución de cada una de las ecuaciones siguientes es alguna de las opciones dadas en cada caso

i) $4(5x-3)=2(3x+1)$

a) $S=\left\{\frac{2}{7}\right\}$ b) $S=\{0\}$ c) $S=\{1\}$ d) $S=\left\{\frac{13}{14}\right\}$

ii) $\frac{2x+6}{2}=\frac{-2x+3}{5}$

a) $S=\left\{-\frac{12}{7}\right\}$ b) $S=\{4\}$ c) $S=\left\{\frac{12}{7}\right\}$ d) $S=\left\{\frac{3}{5}\right\}$

iii) $x(x-5)-2x=-6$

a) $S=\{-1\}$ b) $S=\{-1;\ -6\}$ c) $S=\{1\}$ d) $S=\{1;\ 6\}$

iv) $2x(4x-3)=x(x-1)$

FRANJA MORADA Económicas Lomas

a) $S=\left\{\frac{5}{7};\ 0\right\}$ b) $S=\left\{\frac{7}{5};\ 0\right\}$ c) $S=\left\{-\frac{7}{5};\ 0\right\}$ d) $S=\left\{-\frac{5}{7};\ 0\right\}$

Ecuaciones fraccionarias

6) El conjunto solución de cada una de las ecuaciones siguientes es alguna de las opciones dadas en cada caso

i) $\frac{2}{x+3}-1=\frac{2}{5}$

a) $S=\left\{-\frac{11}{7}\right\}$ b) $S=\left\{\frac{7}{11}\right\}$ c) $S=\left\{\frac{11}{7}\right\}$ d) $S=\left\{-\frac{7}{11}\right\}$

ii) $\frac{9}{2x}-3=-\frac{7}{2}-\frac{4}{x^2}$

a) $S=\{1;\ -8\}$ b) $S=\{-1;\ -8\}$ c) $S=\{-1;\ 8\}$ d) $S=\{-1;\ 1\}$

iii) $\frac{5}{2x+6}+1=\frac{2}{x+3}$

a) $S=\left\{\frac{2}{7}\right\}$ b) $S=\left\{\frac{7}{2}\right\}$ c) $S=\left\{-\frac{7}{2}\right\}$ d) $S=\left\{-\frac{3}{7}\right\}$

iv) $\frac{4}{x-2}+\frac{2}{x+2}=\frac{1}{x^2-4}$

a) $S=\{2;\ 0\}$ b) $S=\left\{\frac{1}{2};\ 2\right\}$ c) $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ d) $S=\{2;\ -2\}$

RESPUESTAS

1)	**i) a**	**ii) b**		
2)	**i) c**	**ii) b**	**iii) a**	
3)	**i) a**	**ii) c**	**iii) c**	
4)	**i) c**	**ii) a**		
5)	**i) c**	**ii) a**	**iii) d**	**iv) a**
6)	**i) a**	**ii) b**	**iii) c**	**iv) c**

FRANJA MORADA Económicas Lomas

Sistemas de ecuaciones

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

1) El conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas es alguno de los señalados entre las opciones. Indicar cual es la correcta.

i) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 4x+5y=9 \end{cases}$

a) $S=\{(1;-1)\}$ b) $S=\{(-1;1)\}$ c) $S=\{(1;\ 1)\}$ d) $S=\{(1;\ 2)\}$

ii) $\begin{cases} -4x+7y=-15 \\ 3x-2y=8 \end{cases}$

a) $S=\{(2;-1)\}$ b) $S=\{(-1;-2)\}$ c) $S=\{(-2;-1)\}$ d) $S=\{(-1;2)\}$

iii) $\begin{cases} -5x+y=-7 \\ x=\dfrac{y+5}{4} \end{cases}$

a) $S=\{(-2;3)\}$ b) $S=\{(2;3)\}$ c) $S=\{(2;-2)\}$ d) $S=\{(3;2)\}$

Sistemas de ecuaciones mixtos con dos incógnitas

2) El conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones mixtos con dos incógnitas es alguno de los señalados entre las opciones. Indicar cual es la correcta.

i) $\begin{cases} y^2+4=x \\ 4y=x \end{cases}$

a) $S=\{(2;8)\}$ b) $S=\{(-2;2)\}$ c) $S=\{(8;8)\}$ d) $S=\{(8;2)\}$

ii) $\begin{cases} y=x^2+4x-5 \\ 2y+10=2x \end{cases}$

a) $S=\{(0;-3);(-5;-8)\}$ b) $S=\{(-5;-3);(0;-8)\}$

c) $S=\{(0;-5);(-3;-8)\}$ d) $S=\{(0;5);(-3;-8)\}$

iii) $\begin{cases} x^2+y=4 \\ 2x^2+y=8 \end{cases}$

a) $S=\{(2;0);(-2;-0)\}$ b) $S=\{(2;1);(-2;1)\}$

c) $S=\{(-2;0)\}$ d) $S=\{(2;-2);(0;0)\}$

FRANJA MORADA Económicas Lomas

iv) $\begin{cases} 2x^2 + y = 4 \\ x^2 - y = 8 \end{cases}$

a) $S = \{(2;4);(-2;-4)\}$ b) $S = \{(2;-4);(-2;-4)\}$

c) $S = \{(-2;4);(2;-4)\}$ d) $S = \{(2;4);(2;-4)\}$

v) $\begin{cases} y = -x^2 + 6 \\ y - x^2 = 6 \end{cases}$

a) $S = \{(6;0)\}$ b) $S = \{(-6;0)\}$ c) $S = \{(0;-6)\}$ d) $S = \{(0;6)\}$

vi) $\begin{cases} y - x^2 + 6 = 1 \\ -y + x^2 = 2 \end{cases}$

a) $S = \{(1;-1)\}$ b) $S = \varnothing$ c) $S = \{(1;1)\}$ d) $S = \{(1;2)\}$

vii) $\begin{cases} 3x + y^2 = \dfrac{19}{4} \\ -2y^2 + x = 1 \end{cases}$

a) $S = \left\{\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)\right\}$ b) $S = \left\{\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right);\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)\right\}$

c) $S = \left\{\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right);\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)\right\}$ d) $S = \left\{\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right);\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)\right\}$

RESPUESTAS

1) i) **c** ii) **a** iii) **b**

2) i) **d** ii) **c** iii) **a** iv) **b**

v) **d** vi) **b** vii) **a**

FRANJA MORADA Económicas Lomas

Inecuaciones y módulo

1) El conjunto solución de cada una de las inecuaciones de grado uno es alguno de las opciones dadas en cada caso. Señalar la que corresponde.

i) $3(x+2) < \dfrac{5-3x}{2}$

a) $S = \left(-\infty;\ -\dfrac{7}{3}\right)$ b) $S = \left(\dfrac{7}{9};\ +\infty\right)$ c) $S = \left(-\infty;\ -\dfrac{7}{9}\right)$ d) $S = \left(-\dfrac{7}{3};\ \dfrac{7}{9}\right)$

ii) $\dfrac{x-2}{3} \geq \dfrac{2-3x}{-2} + 1$

a) $S = \left(0;\ \dfrac{4}{7}\right]$ b) $S = \left(\dfrac{4}{7};\ +\infty\right)$ c) $S = \left(-\infty;\ -\dfrac{4}{7}\right)$ d) $S = \left(-\infty;\ -\dfrac{4}{7}\right]$

iii) $\dfrac{1-3x}{3} - \dfrac{2-4x}{5} \leq \dfrac{6-x}{2}$

a) $S = \left(-\infty;\ \dfrac{92}{9}\right]$ b) $S = \left[\dfrac{92}{9};\ +\infty\right)$ c) $S = \left(-\infty;\ -\dfrac{92}{9}\right)$ d) $S = \left(-\infty;\ \dfrac{92}{9}\right)$

iv) $5(3+5x) - x < 2\left(1 - \dfrac{1}{2}x\right) + 5(2+5x)$

a) $S = \left(-\infty;\ \dfrac{1}{16}\right)$ b) $S = \varnothing$ c) $S = \left(-\infty;\ -\dfrac{1}{16}\right)$ d) $S = \left[\dfrac{1}{16};\ +\infty\right)$

2) En las expresiones siguientes que contienen módulo indicar, entre las opciones dadas, cual corresponde al conjunto de reales que las satisfacen.

i) $|5-4x| = 25$

a) $S = \{5\}$ b) $S = \left\{-5;\ \dfrac{15}{2}\right\}$ c) $S = \left\{-5;\ -\dfrac{15}{2}\right\}$ d) $S = \{-25;\ 25\}$

ii) $|3x+2| = 2x-4$

a) $S = \left\{6;\ \dfrac{2}{5}\right\}$ b) $S = \{-6\}$ c) $S = \left\{-6;\ \dfrac{2}{5}\right\}$ d) $S = \varnothing$

FRANJA MORADA Económicas Lomas

iii) $|3x+12| \geq 4$

a) $S = \left(-\infty;\ -\frac{16}{3}\right]$

b) $S = \left(-\infty;\ -\frac{16}{3}\right] \cup \left[-\frac{8}{3};\ +\infty\right)$

c) $S = \left(-\infty; -\frac{16}{3}\right) \cup \left[-\frac{8}{3};\ +\infty\right)$

d) $S = \left(-\infty;\ -\frac{16}{3}\right] \cup \left[\frac{16}{3};\ +\infty\right)$

iv) $4 \leq |3x+12| \leq 20$

a) $S = \left[-\frac{32}{3};\ -\frac{16}{3}\right] \cup \left[-\frac{8}{3};\ \frac{8}{3}\right]$

b) $S = \left(-\infty;\ -\frac{16}{3}\right]$

c) $S = \left[-\frac{8}{3};\ +\infty\right)$

d) $S = \left[-\frac{16}{3};\ \frac{8}{3}\right]$

RESPUESTAS

1) i) **c** ii) **d** iii) **a** iv) **b**

2) i) **b** ii) **d** iii) **b** iv) **a**

FRANJA MORADA Económicas Lomas

INDICE DE CONTENIDOS

Conjuntos
Naturales: pag. 1 y 2
Enteros: pag. 2 a 9
Racionales: pag 9 a 13
Decimales: 13 a 15
Potenciación: pag. 15
Radicación: pag.16 a 18
Reales: pag. 18
Complejos: pag. 19
Ejercitación con conjuntos numéricos: pag19 a 23

Intervalos
Intervalos de números reales: pag. 24
Ejercitación con intervalos: pag. 25

Polinomios
Monomio: pag. 26
Polinomio: pag. 26 y 27
Ejercitación: pag. 27 y 28
Suma y resta de monomios y polinomios: pag. 28
Multiplicación de monomios y polinomios: pag. 29
Ejercitación: pag. 29 y 30
División de polinomios: pag. 30 a 32
Ejercitación: pag.32
Regla de Ruffini: pag. 32 y 33
Ejercitación: pag. 33 y 34
Ceros de un polinomio: pag. 34
Ejercitación: pag. 35

Factorización de polinomios
Factorización de polinomios usando ceros: pag.36
Teorema de Gauss: pag. 36
Ejercitación: pag.38
Factor común: pag.39
Ejercitación: pag.40
Cuadrado de un binomio: pag.40
Ejercitación: pag.41
Trinomio cuadrado perfecto: pag.41
Ejercitación: pag. 42
Diferencia de cuadrados: pag.43
Ejercitación: pag.43

FRANJA MORADA Económicas Lomas

Ejercitación combinando casos: pag.44

Fracciones algebraicas
Simplificación de fracciones algebraicas: pag.45
Ejercitación: pag.46
Suma y resta de fracciones algebraicas: pag.46
Ejercitación: pag.47
Multiplicación y división de fracciones: pag.47
Ejercitación: pag.48
Ejercitación combinada: pag.48

Ecuaciones
Ecuación en R: pag.49
Clasificación de ecuaciones: pag.49
Grado de una ecuación: pag.50
Conjunto solución: pag.50
Ecuaciones equivalentes: pag.50
Propiedades: pag.51
Ecuaciones de grado uno: pag.51 y 52
Ejercitación: pag.52
Ecuaciones de grado mayor que uno: pag.53
Ecuaciones de segundo grado: pag.53
Ecuaciones de grado mayor a dos: pag.54 y 55
Ejercitación con ecuaciones enteras: pag.56
Ecuaciones fraccionarias: pag.56 y 57
Ejercitación: pag. 58

Ecuaciones con dos incógnitas
Ecuaciones con dos incógnitas: pag.59
Conjunto solución: pag.59
Sistema compatible e incompatible: pag.60
Sistema determinado: pag.60
Sistema indeterminado: pag.60
Método de sustitución: pag.61
Método de igualación: pag.62
Método de reducción: pag.63 y 64
Sistemas mixtos: pag.65
Ejercitación: pag.66

Inecuaciones
Inecuación en R: pag.67
Propiedades de desigualdades: pag.67
Ejemplos de solución de inecuaciones de grado uno: pag.68 y 69
Ejercitación: pag.69

Módulo
Módulo de un real:
Propiedades del módulo: pag.70
Ecuaciones e inecuaciones con módulo: pag.71
Ejercitación: pag.72

Apéndice I: Lógica
Proposición: pag.73
Conectivos lógicos: pag.73
Conjunción lógica: pag.73
Disyunción lógica: pag.74
Implicación: pag.74
Equivalencia: pag.75
Negación: pag.75
Función proposicional: pag.75
Cuantificadores: pag.76

Apéndice II: Conjuntos
Conjunto: pag.77
Definición de un conjunto: pag.77
Conjunto vacío: pag.78
Inclusión de conjuntos: pag.78
Igualdad de conjuntos: pag.78
Unión de conjuntos: pag.78
Intersección de conjuntos: pag.79
Diferencia de conjuntos: pag.79

Ejercitación de repaso
Pag 80 a 92

NARANJA MORADA Económicas Lomas